പൈതൃകപഠനം 20

ഭാഗം 5

ഭാരതീയ ഗണിതശാസ്ത്ര പൈതൃകം

(വിദ്യാർത്ഥികൾക്കും അധ്യാപകർക്കും)

Dr. N. Gopalakrishnan, Ph. D., D.Litt
Scientist, & Hon. Director IISH

Indian Institute of Scientific Heritage
Thiruvananthapuram - 695 018

Heritage Publication Series - 65

പൈതൃകപഠനം

ഭാഗം 5

ഭാരതീയ ഗണിതശാസ്ത്ര പൈതൃകം

(വിദ്യാർത്ഥികൾക്കും അധ്യാപകർക്കും)

DR. N. GOPALAKRISHNAN, Ph.D; D.Lit

Scientist & Hon Director IISH

Indian Institute of Scientific Heritage
Thiruvananthapuram - 695 018

Heritage Publication Series - 65

ഭാരതീയ ഗണിതശാസ്ത്ര പൈതൃകം
Dr. N. Gopalakrishnan
M.Sc (Pharm), M.Sc (Chem), M.A. (Soc), Ph.D. (Chem); D.Lit
(Scientist & Hon. Director IISH)

Indian Institute of Scientific Heritage (IISH)
Registered Charitable Trust 328/99/IV
Ushus, Estate Road, Pappanamcode
Trivandrum - 695 018 (Ph. 0471 - 2490149)
www.iish.org

Rs. 20/-

Printed at:

Sree Printers (DTP, Offset & Screenprinting)
Ind. Estate, Pappanamcode, TVM - 19, Ph. 0471 - 2490135

DHANYATHMAN

IISH is spreading the messages of our motherland through our publications in the PDF format to all our well-wishers. Your support for the mission is welcome.

Details of the bank account

Beneficiary : IISH Trivandrum
Ac No : 57020795171
IFSC : SBIN0070030
Bank : SBI industrial estate, papanamcode
Trivandrum-19

In the service of the motherland and dharma

IISH Publication Team

പ്രിയകുടുംബാംഗങ്ങളെ!

നമ്മുടെ മാതൃഭൂമി എന്തായിരുന്നു എന്നറിയണം ഇപ്പോൾ നാം എവിടെ നിൽക്കുന്നു എന്നറിയണം നമുക്ക് അപകർഷതയും വേദനയും ഉണ്ടാക്കിയതാര് ? പൈതൃകത്തെ പുച്ഛിക്കുന്നത് പുരോഗമനമെന്നുപദേശിക്കുന്നതാര് ? പൈതൃകത്തിന്റെ മഹത്വം പഠിക്കണം ! പഠിക്കാൻ സാധിക്കാത്തതും പഠിക്കാൻ ശ്രമിച്ചാലും മനസ്സിലാകാത്തതുമുണ്ട് എന്നറിയണം! ഭാരതത്തെ മറ്റൊരു ദേശത്തിനോടും താരതമ്യം ചെയ്യുവാൻ സാധ്യമല്ല! നമ്മുടെ പൈതൃകവും സംസ്കാരവും പ്രത്യേകതയുള്ളതാണ്. ഒന്നുമറിയാത്തവനും ഒറക്കെ പറയുന്നവനും ഒടുക്കം നിറുത്തുന്നവനും ജയിക്കുന്ന ഒരേ ഒരു സംസ്ഥാനമാണ് കേരളം. സത്യസന്ധത പാലിക്കേണ്ട ബുദ്ധിജീവികൾ കൊടിപിടിക്കുന്ന ഒരേ ഒരു ദേശമാണിത് ! തുറന്ന മനസ്സുമായി കാര്യങ്ങളെ വിലയിരുത്താതെ 'ഇസക്കാർ' പറയുന്നതാവർത്തിക്കുന്നവർക്ക് സ്വീകരണം നൽകുന്ന മാധ്യമങ്ങൾ കൂടുതലുള്ള ദേശവുമിതാണ്! എനിക്കറിയാത്തതും ഞാനംഗീകരിക്കാത്തതുമെല്ലാം അന്ധവിശ്വാസമാണെന്നു പ്രഖ്യാപിക്കുന്നവർ ധാരാളമുള്ളതുമിവിടെയാണ്. വിദ്യാഭ്യാസമില്ലാത്ത നേതാവിൽ നിന്നുപോലും പണ്ഡിതർക്ക് സംസാരിക്കാൻ അനുവാദം വേണ്ടതായ ഒരേ ഒരു ദേശമാണ് ഈ പരശുരാമക്ഷേത്രം! ജ്യോതിഷത്തെ എതിർക്കുന്നവർ തന്നെ എന്തിനും ഏതിനും ജ്യോതിഷത്തെ ആശ്രയിക്കുന്നവരായിട്ടുള്ളതുമിവിടെത്തന്നെ!

പക്ഷേ കേരളത്തിന് മറ്റൊരു ചിത്രമുണ്ട് ആദി ശങ്കരാചാര്യർക്കു ഈ ദേശം ജന്മം നൽകി! അന്ധവിശ്വാസത്തെ കടപുഴക്കിയെറിഞ്ഞ ശ്രീനാരായണഗുരുദേവൻ ഈ ദേശത്തിൽ ജനിച്ചു. കൃസ്തുമതച്ഛേദനവും വേദാധികാര നിരൂപണവുമെഴുതിയ ചട്ടമ്പിസ്വാമിയുടെയും ദേശമാണിത്. ബ്രഹ്മസ്ഥാനവും, സൂപ്പർസ്പെഷ്യാലിറ്റി ആശുപത്രിയും, എൻജിനീയറിംഗ് കോളേജും, മെഡിക്കൽ കോളേജും ഒരേ കൈകൊണ്ട് പ്രതിഷ്ഠിക്കുന്ന മാതാ അമൃതാനന്ദമയിക്ക് ഈ ദേശം ജന്മം നൽകി. മരണം വരെ നിരീശ്വരവാദികളായിരിക്കുമെന്നട്ടഹസിച്ചവരെല്ലാം ക്ഷേത്രത്തിലും, ആശ്രമത്തിലും, ആത്മീയ നേതാക്കളുടെ മുമ്പിലും എത്തുന്ന ഒരു ദേശവും കേരളമാണ്.

ആര്യഭടന്റേയും, ലല്ലാചാര്യന്റെയും, മഞ്ജുളാചാര്യന്റേയും വടേശ്വരാചാര്യന്റേയും സംഗമഗ്രാമ മാധവാചാര്യന്റേയും, പുതുമന സോമയാജിയുടേയും, അച്ച്യുതപിഷാരടിയുടെയും, പരമേശ്വരാചാര്യരുടെയും, ശങ്കരവർമന്റേയുമെല്ലാം ശാസ്ത്ര സംഭാവനകൾ, ഭാരതത്തിന്റെ ശാസ്ത്ര പൈതൃക സംഭാവനകളാണ്. ഇതെല്ലാം പഠിച്ചു പഠിപ്പിക്കാനുള്ള ശുഭമായ അന്തരീക്ഷമുള്ളതുമിവിടെയാണ്. !

ഭാരതീയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞന്മാർ കണ്ടുപിടിച്ച ഫോർമുലകൾ, സിദ്ധാന്തങ്ങൾ, സത്യങ്ങൾ, തത്വങ്ങൾ ഇവയിൽ പലതും പാശ്ചാത്യശാസ്ത്രജ്ഞന്മാരുടെ പേരിലാണിന്നറിയപ്പെടുന്നത്. സ്വന്തം പൈതൃകത്തിന്റെ മഹത്വമറിഞ്ഞു വളരേണ്ട തലമുറകൾ/വിദ്യാർത്ഥികൾ അതറിയണം. അദ്ധ്യാപകർ അവരെ അറിയിക്കണം. ലോകശാസ്ത്ര സമൂഹത്തോട് "ഇതെന്റെ പിതൃസ്വത്താ"ണെന്ന് പറയുവാൻ കെൽപ്പുള്ള ഒരു ജനതയെ നാടിന് കൊടുത്തിട്ടെ, ഇന്നത്തെ തലമുറ വിശ്രമിക്കാവൂ. എതിർക്കുന്നവരെതിർക്കട്ടെ ! മാതൃഭൂമിയുടെ അജയ്യമായ അനുഗ്രഹത്തോടെ നമുക്ക് പൈതൃകം പഠിക്കാം! പഠിപ്പിക്കാം! പ്രചരിപ്പിക്കാം!

സത്യം ജയിക്കാതിരിക്കില്ല. മറ്റെല്ലാസംസ്കൃതിയും മണ്ണടിഞ്ഞിട്ടും സനാതന സംസ്കൃതിയും അതിന്റെ ആധാരശിലകളും നശിക്കാതിരിക്കാൻ കാരണം അവയിലുള്ളത് പരമമായ സത്യങ്ങളാണ്. ശാസ്ത്ര സത്യങ്ങൾ! ലോകജനതക്കെന്നും വെളിച്ചം നൽകിയ സത്യങ്ങളാണവ. അതു നമക്കു പഠിച്ച് പഠിപ്പിച്ച് പ്രചരിപ്പിക്കാം!

ഞങ്ങളെന്നും നിങ്ങളോടൊപ്പമുണ്ടായിരിക്കും! ഈ പൈതൃക പ്രചരണത്തിന് അവസാനശ്വാസം വരെ !

എല്ലാ ഗണിതജ്ഞാനത്തിനും ഒരു ഉദാഹരണം വീതം നൽകിയാണ് ഈ പുസ്തകം രചിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഈ ദേശത്തിന് സമർപ്പിക്കുന്നു.

20 - 4 - 2003 ഡോ. എൻ. ഗോപാലകൃഷ്ണൻ

ഗണിതക്രിയകളിൽ ആവറേജ്/ ശരാശരി

ലീലാവതിയിൽ (1148 AD) ഭാസ്കരാചാര്യർ, ആവറേജ് എന്ന ഗണിത ക്രിയയെക്കുറിച്ച് വിവരിക്കുന്നതിപ്രകാരമാണ്.

യഥായഥാ ബഹുഷു സ്ഥാനേഷു വിസ്താരാധികം ഗണ്യതേ തഥാ തഥാ സമമിതി സൂക്ഷ്മ സൂക്ഷ്മതരാ സ്യാത്.

കൃത്യവും കൂടുതൽ സൂക്ഷ്മവുമായ അളവു ലഭിക്കുവാനും ശരാശരി എടുക്കുന്നത് സഹായകരമാകും അതിനാൽ കൂടുതൽ പ്രാവശ്യം/ സ്ഥാനങ്ങളിൽ അളവുകളെടുക്കണം.

റേഷ്യോയും പ്രൊപ്പോർഷനും

ഭാസ്കരാചാര്യർ ഒന്നാമൻ (628 AD) യിൽ രചിച്ച ആര്യഭടീയ ഭാഷ്യത്തിൽ ഇപ്രകാരം വിവരിക്കുന്നു.

അഷ്ടൗ ദാന്താസ്ത്രയോ ദമ്യാ ഇതി ഗാവ : പ്രകീർത്തിതാ:
ഏകാഗ്രസ്യ സഹസ്രസ്യ കതി ദാന്താ : കതീതരെ.

ആകെയുള്ള പശുക്കളിൽ 8 : 3 എന്ന റേഷ്യോയിൽ മെരുങ്ങിയതും അല്ലാത്തതുമായ പശുക്കളാണുള്ളത് എങ്കിൽ ആകെ മെരുക്കമുള്ള പശുക്കളെത്ര? മെരുങ്ങാത്ത പശുക്കളെത്ര?

പെർമ്യൂട്ടേഷൻ കോമ്പിനേഷൻ

അനേകം വസ്തുക്കളെ വ്യത്യസ്തരീതിയിൽ ക്രമീകരിച്ചാലുണ്ടാകുന്ന പ്രത്യേകതകളെക്കുറിച്ചു വിവരിക്കുന്ന ഗണിതരീതി സുശ്രുത സംഹിതയിലും അനവധി ഗണിതശാസ്ത്രഗ്രന്ഥങ്ങളിലുമുണ്ട്.

പാശാങ്കുശാഹി ഡമരുക കപാല ശൂലൈ : ഖഡ്വാംഗ ശക്തി ശര ചാപ യുതൈർ ഭവന്തി അന്യോന്യ ഹസ്ത കലിതൈ: കതി മൂർത്തി ഭേദാ: ശംഭോർഹരേരിവ ഗദാരി സരോജ ശംഖ ചക്രൈ:

പാശം, അങ്കുശം, ഡമരുകം, കപാലം, ശൂലം, ഖഡ്വാംഗം, ശക്തി, ശരം, ചാപം എന്നീ പത്തു വസ്തുക്കൾ മഹാദേവന്റെ പത്തു കൈകളിൽ പലതര കോംബിനേഷനിലൂടെ വന്നാൽ ശിവന് എത്ര രൂപഭേദങ്ങളുണ്ടാകും, അപ്രകാരം തന്നെ ഗണിച്ച്, ശംഖ-ചക്ര-ഗദാ-പത്മം നാലു കൈകളിൽ വ്യത്യസ്ത കോംബിനേഷനിൽ പിടിക്കുന്ന വിഷ്ണുവിന് എത്ര രൂപഭേദങ്ങളുണ്ടാകും.

ഇവിടെ ശിവന്റെ രൂപങ്ങൾ 1 x 2 x 3 x .... x 10 അതായത് 10! (ഫാക്ടോറിയൽ 10) എന്നും വിഷ്ണുവിന് 4! ഉം രൂപങ്ങൾ ലഭിക്കും.

ശതമാനം ഗണിക്കൽ

പെർസന്റേജ് എന്ന പ്രയോഗം ഗണിതത്തിന്റെ അവിഭാജ്യഘടകമാണ്. അതിന്റെ അർത്ഥം നൂറിന്/നൂറ്റിക്ക് എന്നാണ്. ഭാരതത്തിൽ ശതമാനപ്രയോഗം സർവ്വസാധാരണമായിരുന്നു. അടുത്ത വരിയിൽ 'ശതമാനത്തിന്' ഉദാഹരണം നൽകിയിരിക്കുന്നു.

പലിശ ഗണിക്കൽ

ശ്രീധരാചാര്യർ പാടിഗണിതത്തിൽ നൽകിയിരിക്കുന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

മാസേന ശതസ്യ ഫലം പഞ്ചെ കോ ഭാവ്യ കേ്ർധമയവൃത്തോ ലേഖകപാദോ വർഷേ പഞ്ചാധിക നവ ശതീമിശ്രം

പ്രതിമാസ പലിശനിരക്ക് 5%, കടംകൊടുക്കുന്നതിലുള്ള ഉറപ്പിനുള്ള കമ്മീഷൻ 1%, കണക്ക് പരിശോധിക്കുന്ന വ്യക്തിക്കുള്ള ചിലവ് ½%, എഴുതുന്ന വ്യക്തിക്കുള്ള കൂലി (ശമ്പളം) ¼% ഇവയെല്ലാം കഴിഞ്ഞ് ഒരു സംഖ്യ 905 രൂപയായിത്തീർന്നു എങ്കിൽ മുതലും, മറ്റെല്ലാസംഖ്യകളും കണ്ടുപിടിക്കുക.

ആധുനീക കാലഘട്ടത്തിനോട് കിടപിടിക്കുന്ന വിധത്തിലുള്ള ലോൺ സംവിധാനവും കൂടി മേൽ വിവരിച്ച ഗണിതത്തിൽ നമുക്ക് കാണാം. 1100 വർഷങ്ങൾക്കുമുമ്പ് രചിച്ച വിവരണമാണ് മേലുദ്ധരിച്ചത്.

സാധാരണ പലിശ

രണ്ടായിരത്തിമുന്നൂറിൽപരം വർഷങ്ങൾക്കു മുമ്പു രചിച്ചിട്ടുള്ള വിഷ്ണുധർമ്മശാസ്ത്രത്തിലെ പലിശയെക്കുറിച്ചുള്ള വിവരണം.

സപാദപണാ ധർമ്യാ മാസവൃദ്ധി പണശതസ്യ പഞ്ചപണാ വ്യാവഹാരികീ

ധാർമ്മീകമായ മാസപലിശ 1¼% ആകുന്നു. കച്ചവടാവശ്യത്തിനുള്ള പലിശനിരക്കാകട്ടെ 5% വരെയാകാം (പ്രതിമാസം)

കൂട്ടു പലിശ

വിഷ്ണുസ്മൃതിയിൽ (100 BC) യിൽ തന്നെ കോമ്പൗണ്ട് ഇന്റ റസ്റ്റ് എന്ന കൂട്ടുപലിശ ക്രമം നിലനിന്നിരുന്നതായി വിവരണമുണ്ട്.

വൃദ്ധേരപി പുനർവൃദ്ധി ചക്ര വൃദ്ധിരുദാഹൃത:

പലിശയും പലിശയുടെ പലിശയും ചേരുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന വൃദ്ധിയാണ് ചക്രവൃദ്ധി അഥവാ കൂട്ടുപലിശ എന്നറിയപ്പെടുന്നത്

പാർട്ടണർഷിപ് ബിസിനസ്

ഭാസ്കരാചാര്യർ ഒന്നാമൻ (628 AD) ആര്യഭടീയത്തിനുള്ള ഭാസ്കര ഭാഷ്യത്തിൽ പലവ്യാപാരികൾ ഒന്നിച്ച് പ്രത്യേകാനുപാത ത്തിൽ മുതൽ മുടക്കി നടത്തുന്ന സംരംഭങ്ങളിൽ ലാഭം വീതം വെക്കു ന്നതിന്റെ രീതി ഇപ്രകാരം വിവരിക്കുന്നു.

സമവായകാസ്തു വണിജ: പഞ്ചൈകൈകോത്തരാധി മൂലധനാ:
ലാഭ: സഹസ്രസംഖ്യാ വദ കസ്മൈ തത്ര കിം ദേയം

അഞ്ച് വ്യാപാരികൾ 1, 2, 3, 4, 5 എന്നീ ക്രമത്തിൽ മൂലധനം ഇറക്കി വ്യാപാരമാരംഭിച്ചപ്പോൾ ലഭിച്ച ലാഭം 1000 ആയിരുന്നു! ഓരോ വ്യാപാരിക്കും ലഭിക്കുന്നു ലാഭവിഹിതം എത്രയാണ് ?

ഒരേ ദിശയിലും എതിർ ദിശയിലുമുള്ള ചലനം

റോഡിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ നാം അനുനിമിഷം കാണുന്ന പ്രതിഭാസമാണ് വാഹനങ്ങൾ ഒരേ ദിശയിലേയ്ക്കും എതിർ ദിശയി ലേയ്ക്കും വളരെ വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നത്. അകലത്തിലുള്ള വാഹ നങ്ങൾ ഇപ്രകാരം സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ അവ പരസ്പരം ഏറ്റവും അടു ത്തുവരുന്ന (കണ്ടുമുട്ടുന്ന)തിന് എത്രസമയം വേണ്ടിവരും എന്നു ഗണി ച്ചെടുക്കുന്നത് ഗണിത–ജ്യോതിശാസ്ത്രത്തിലെ ഒരു പ്രധാനവിഷയ മാണ്. അനേകം ഗണിത പ്രശ്നങ്ങൾ, ഭാരതീയർ, ഈ വിഷയത്തിൽ കൈകാര്യം ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. ശ്രീധരാചാര്യർ പാടിഗണിതത്തിലൂടെ നൽകുന്ന അനവധി പ്രശ്നങ്ങളിൽ ഒന്ന്.

ഏകൗ നാ യോജനാന്യഷ്ടൗ യാത്യന്യോ യോജന ദ്വയം
യോജനാനാം ശതപന്ഥാ: സംഗമാ ക്വ ഗമാഗമേ

ഒരു വ്യക്തി 8 യോജന വേഗത്തിലും മറ്റേ വ്യക്തി 2 യോജന വേഗത്തിലും സഞ്ചരിക്കുന്നു. അവർ തമ്മിലുള്ള അകലം (ദൂരം) 100 യോജനയാണെങ്കിൽ അവരുടെ സംഗമം എവിടെവെച്ചായിരിക്കും.

ഭാസ്കരാചാര്യർ നൽകുന്ന മറ്റൊരുദാഹരണം.

സാർധം യോജനമേകോ വലഭീതോ യാത്യസൗ ദിനേനൈവ
ആഗച്ഛതി ഹരുകച്ഛാത് പാദയുതം യോജനംഹ്യപര:
അന്തരമനയോർ ദൃഷ്ടം ത്വഷ്ടാവംശ യോജനാനി
പഥികേന വാച്യം യോഗ: കിയതാ കാലേനാഭൂത് തയോർ ഗണക:

ഒരു യാത്രക്കാരൻ വലഭി എന്ന സ്ഥലത്തുനിന്നും പ്രതിദിനം ഒന്നര യോജന വേഗതയിൽ ഹരുക്കച്ഛ എന്ന സ്ഥലത്തേക്ക് യാത്ര ചെയ്യുന്നു. ഹരുക്കച്ഛയിൽ നിന്ന് മറ്റൊരു വ്യക്തി ഒന്നേകാൽ യോജന വേഗതയിൽ വലഭിയിലേക്കും വരുന്നു. ഈ രണ്ടു ദേശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം 18 യോജനയെങ്കിൽ അവർ കണ്ടുമുട്ടുന്നതെപ്പോൾ ?

വേഗതയിലെ ഏറ്റകുറച്ചിലും കണ്ടുമുട്ടുന്ന സമയവും

ആധുനീക ഗണിതത്തിൽ ആക്സിലറേഷനും റിട്ടാർഡേഷനും സർവസാധാരണയായി പ്രയോഗിക്കാറുണ്ട്. അപ്രകാരമൊരു ഗണിത ക്രിയ ശ്രീധരാചാര്യനിൽ നിന്നെടുക്കാം.

ത്ര്യയാദ് ഏകോത്തര വൃദ്ധ്യാ യാത്യേക: പ്രതിദിനം നരസ്ത്വന്യ:
ദശ യോജനാനി കിയതാ കാലേന തയോർ ഗതിസ്തുല്യാ

ഒരു യാത്രികൻ പ്രതിദിനം 3 യോജന വേഗത്തിൽ ഓരോ യോജനവീതം പ്രതിദിനം കൂട്ടികൂട്ടി സഞ്ചരിക്കുന്നു. (അതായത് ആക്സിലറേഷൻ ഒരു യോജനവീതം) മറ്റൊരാൾ പ്രതിദിനം 10 യോജന വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ഇവർ തമ്മിൽ എപ്പോഴാണ് കണ്ടുമുട്ടുന്നത് ?

മുമ്പോട്ടും പുറകോട്ടുമുള്ള സഞ്ചാരം

രസകരമായ ഗണിതപന്ഥാവിലൂടെ ചലിച്ചവരായിരുന്നു ഭാരതീയർ എന്ന് മനസ്സിലാക്കാവുന്ന അനേകം ഉദാഹരണങ്ങൾ ഉണ്ട്. മുമ്പോട്ടും പുറകോട്ടും പോകുന്ന സഞ്ചാരഗണിതം ശ്രദ്ധിക്കുക.

നാഗോവിംശതി ഹസ്ത: പ്രവിശത്യർദ്ധാംഗുലം മുഹൂർത്തേന പ്രത്യേതി ച പഞ്ചാംശം കതിഭിരഹോഭിർബിലം പ്രാപ്തം .

ഇരുപത് അടി നീളമുള്ള ഒരു പാമ്പ് മാളത്തിൽ പ്രവേശിക്കുന്നത് അര അംഗുലം പ്രതി മുഹൂർത്തം വേഗത്തിലാണ്. (അംഗുലം എന്നത് നീളം, മുഹൂർത്തം എന്നത് സമയത്തിന്റെ അളവ്) അകത്തേക്കുപോകുന്നതോടൊപ്പം $^1/_5$ അംഗുലം വീതം, ആ പാമ്പ്, ഓരോ മുഹൂർത്തത്തിലും പുറകോട്ടുവരുന്നുമുണ്ട് എങ്കിൽ എത്രസമയം കൊണ്ടായിരിക്കും 20 അടി നീളമുള്ള പാമ്പ് പൂർണമായും മാളത്തിലേക്ക് പ്രവേശിക്കുന്നത്.

പ്രോഗ്രഷൻ

പുരാതന ഭാരതീയ ഗണിതജ്ഞന്മാർ പ്രോഗ്രഷൻ വിഷയത്തിൽ അതിഗഹനങ്ങളായ സംഭാവനകൾ നൽകിയിട്ടുണ്ട്. ആര്യഭടൻ, ഭാസ്കരൻ, ശ്രീധരൻ, തുടങ്ങിയ പ്രഗത്ഭരായ ഗണിതജ്ഞന്മാരുടെ സംഭാവന അവിസ്മരണീയമാണ്. ഭാസ്കരാചാര്യന്റെ (I) ഒരു ഉദാഹരണം

ഏകാ ദശോത്തരായഃ സപ്താദേഃ പഞ്ചവിംശതിർ ഗച്ഛഃ
തത്രാന്ത്യോപാന്ത്യധനേ വദ ശീഘ്രം വിംശതേശ്ച കിയത്

ഒരു അരിതമെറ്റിക് പ്രോഗ്രഷനിൽ അദ്യ സംഖ്യ 7 ഉം പൊതു വ്യത്യാസം 11 ഉം, ആകെ സംഖ്യകൾ 25 ഉം ആണെങ്കിൽ അവസാനത്തേതും, അതിനു തൊട്ടുമുമ്പുള്ളതും ഇരുപതാമത്തേതുമായ സംഖ്യകൾ ഏതെല്ലാം.

പഞ്ചഭിരാദ്യഃ ശംഖഃ പഞ്ചോനശതേന യോ ഭവേതന്ത്യം
ഏകാദശ ശംഖാനാം യത് മൂല്യം ത്വമാചക്ഷ

(അതേ ഗ്രന്ഥത്തിലെ മറ്റൊരുദാഹരണമാണിത്)പതിനൊന്നു ശംഖുകൾ വിൽപനക്ക് വെച്ചിട്ടുണ്ട്. അതിൽ ആദ്യത്തെ ശംഖിന് 5 ഉം അവസാനത്തെ ശംഖിന് 95 മാണ് മൂല്യം. എല്ലാ ശംഖിന്റേയും വിൽപന അരിത്മെറ്റിക് പ്രോഗ്രഷൻ പ്രകാരമുള്ള വിലക്കാണ് നടന്നിരിക്കുന്നതെങ്കിൽ ആകെ വില പറയുക.

പ്രശസ്ത ഗണിതജ്ഞനായ ഭാസ്കരാചാര്യരുടെ മറ്റൊരുദാഹരണം

ദ്വയാദി ത്രിയുത്തര സംഖ്യാം ദിനേ ദിനേ കാർത്തികേ ക്രമാൻ മാസേ
പ്രദദാതി മഹീപാലഃ പഞ്ചദശാഹേ ഗതേ വിപ്രഃ ബ്രഹ്മിഷ്ഠഃ സംപ്രാപ്ത
സ്തസ്മൈ ദത്താ ദശാഹധന സംഖ്യാം. പഞ്ചദിനോത്ഥാഃ നൃസൈമ
കഥയ ധനം കിം തയോസ്തത്ര

ഒരു രാജാവ് കാർത്തിക മാസത്തിൽ നൽകികൊണ്ടിരുന്ന ദാനം ഇപ്രകാരമായിരുന്നു. ആദ്യദിവസം രണ്ടും, തുടർന്നുള്ള ഓരോദിവസവും, പ്രതിദിനം 3 വീതം കൂട്ടിയും. പതിനഞ്ചുദിവസം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ അതിശ്രേഷ്ഠനായ ഒരു ബ്രാഹ്മണൻ വന്നു: അടുത്ത പത്തു ദിവസങ്ങളിലായി നൽകേണ്ടിയിരുന്ന തുക ഈ ബ്രഹ്മജ്ഞാനിക്ക് രാജാവ് നൽകി. ബാക്കിയുള്ള അഞ്ച് ദിവസങ്ങളിൽ നൽകേണ്ടതായ സംഖ്യ മറ്റൊരു പണ്ഢിതനും നൽകി. അപ്രകാരമെങ്കിൽ ഓരോരുത്തർക്കും ലഭിക്കുന്ന സംഖ്യ എത്രയായിരിക്കും ?

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^2$ സീരീസ്

ഈ പ്രോഗ്രഷന് ഉദാഹരണം ഭാസ്കരാചാര്യർ നൽകുന്നു.

സപ്താനാം അഷ്ടാനാം സപ്ത ദശാനാം ചതുർഭുജശ്ചിതയഃ
ഏകവിദ്യാനാം വാച്യാം പദസ്തരാസ്താ ഹി വർഗാഖ്യാ:

മൂന്നു പിരമിഡുകളുടെ ആകൃതിയിൽ (സമചതുരാകൃതിയിൽ അടിത്തറയുള്ള) 7, 8, 17 വീതം സമചതുര വരികളുള്ള ഇഷ്ടികചിതികൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ അവയിൽ ആകെയുള്ള സമചതുര യൂണിറ്റുകൾ / വരികൾ എത്ര വീതമായിരിക്കും ?

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^3$ സീരീസ്

മേൽവിവരിച്ച ഘനസംഖ്യകളടങ്ങുന്ന ചിതികളുടെ ഉദാഹരണത്തോടെ നൽകുന്ന പ്രശ്നമാണിത്.

ചതുരശ്രഘനശ്ചിതയഃ പഞ്ചചതുർനവസ്തരാ വിനിർദേശ്യാഃ
ഏകാവഘടിതാസ്താഃ സമചതുരശ്രേഷ്ടകാഃ ക്രമശഃ

ക്യൂബിന്റെ ആകൃതിയിലുള്ള ഇഷ്ടികകളാൽ നിർമ്മിക്കപ്പെട്ട 5, 4, 9 വീതം നിരകളുള്ള മൂന്നു ചിതികളുണ്ടെങ്കിൽ ഓരോ ചിതിയിലുമുള്ള ഇഷ്ടികകളുടെ എണ്ണമെത്ര?

എത്ര സങ്കീർണായ പ്രശ്നമാണിതെന്നറിയണമെങ്കിൽ രണ്ടുവരി വിവരണം കൂടി നോക്കണം. മേൽ വിവരിച്ച പ്രശ്നത്തിൽ ചിതിയുടെ ഏറ്റവും മുകളിലുള്ള വരിയിൽ 1^3 ഇഷ്ടികയുണ്ട് രണ്ടാംവരിയിൽ 2^3 ഉണ്ട്. മൂന്നാം വരിയിൽ 3^3 എന്നിപ്രകാരം 5, 4, 9 എന്നീ വരികളിലും, അതാതു വരികൾ (ലെയർ) വരേയും എത്ര ഇഷ്ടികകളുണ്ടെന്നറിയാനുള്ളതാണ് ഗണിതവിവരണം.

ജ്ഞാതമൂല്യങ്ങളിൽനിന്ന് അജ്ഞാതമൂല്യനിർണയം

ശ്രീധരാചാര്യൻ നൽകിയിരിക്കുന്ന ഒരു സങ്കീർണമായ പ്രശ്നം

മുദ്ഗാനാം കുഡവാഃ സപ്തലഭ്യന്തെ നവഭിപണൈഃ
പണേന കുഡവസ്യാർധം തണ്ഡുലാനാമവാപ്യതേ
തതഃ പണത്രയം സാർധം ഗൃഹീത്വാ ffശു വണിങ് മമ
തണ്ഡുലാനാം പ്രയച്ഛാംശ മുദ്ഗാനാം ച ദ്വിസംഗുണം

9 പണം കൊടുത്താൽ ഏഴു കുഡവം ചെറുപരിപ്പ് ലഭിക്കുന്നു. ഒരു പണം കൊടുത്താൽ അര കുഡവം അരിയും ലഭിക്കും. പ്രിയ വ്യാപാരി എന്റെ കയ്യിലുള്ള 3 ½ പണം സ്വീകരിച്ച് ഒരു ഭാഗം അരിയും രണ്ടുഭാഗം ചെറുപരിപ്പും നൽകിയാലും. (അതെത്ര അളവാണെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കണം)

ഭാസ്കരാചാര്യൻ (II) ലീലാവതിയിൽ (1148 എ.ഡി) നൽകിയിരിക്കുന്ന ഗണിതപ്രശ്നം

അമല കമലാശയേസ്ത്രയംശ പഞ്ചാശഷ ഷൈഠ സ്ത്രിനയന ഹരി സൂര്യാ യേന തുര്യേണചാര്യാ ഗുരുപദമഥ ഷഡ്ഭിഃ പൂജിതം ശേഷ പങ്കൈഃ സകലകല സംഖ്യാം ക്ഷിപ്രമാഖ്യാഹി തസ്യ.

കയ്യിലുള്ള താമരപ്പൂക്കളുടെ എണ്ണത്തിൽ $1/3$ ഭാഗം ശങ്കരാർചനക്ക് നൽകി. $1/5$ ഭാഗം വിഷ്ണുവിനും, $1/6$ ഭാഗം സൂര്യനും ¼ ഭാഗം ദേവി പൂജക്കും നൽകിയതിനുശേഷമുള്ള 5 പുഷ്പങ്ങൾ ഗുരു സന്നിധിയിലർപ്പിച്ചു എങ്കിൽ ആകെ എത്ര പുഷ്പങ്ങളുണ്ടായിരുന്നു ?

യേ നിർഝരാ ദിന ദിനാർധ തൃതീയ ഷഷ്ഠാ :
സംപൂരയന്തി ഹി പൃഥക് പൃഥഗേവ മുക്താ :
വാപീം യദാ യുഗ പദേവ സഖേ വിമുക്താ-
സ്തേ കേന വാസരലവേന തദാ വദാശു

(ലീലാവതിയിലെ മറ്റൊരു ഗണിതപ്രശ്നം) ഒരു ടാങ്കിലേക്ക് ഘടിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന നാലുകുഴലുകൾ പ്രത്യേകം പ്രത്യേകം തുറന്നാൽ ക്രമത്തിൽ 1, ½, $1/3$, $1/6$ ദിവസം കൊണ്ട് ടാങ്ക് നിറയും. എന്നാൽ എല്ലാ കുഴലുകളും ഒരുമിച്ചു തുറന്നാൽ ടാങ്ക് നിറയുവാൻ ഒരു ദിവസത്തിന്റെ എത്രഭാഗം വേണ്ടിവരും ?

വാനരകുല ത്രി ഭാഗ: സ്വത്ര്യംശ സമന്വിത: സര: പ്രയയൗ
മൂലം ച പിപാസ്തി ദ്വൗ ചൂതതലേ സ്ഥിതൗ ശേഷൗ

(പല ഗണിത പുസ്തകത്തിലും നൽകിയിരിക്കുന്ന ഈ ഗണിത പ്രശ്നം ഇപ്രകാരമാണ്.) ആകെയുള്ള കുരങ്ങന്മാരിൽ $^1/_3$ ഭാഗവും അതിന്റെ $^1/_3$ ഭാഗവും സരസിലേക്ക് പോയി. ആകെയുള്ളവയുടെ എണ്ണത്തിന്റെ വർഗമൂലം ദാഹിച്ചു വലയുന്നു. ബാക്കിയുള്ള രണ്ടു കുരങ്ങന്മാർ മാവിൻ ചുവട്ടിൽ ഇരിക്കുന്നു. ആകെ കുരങ്ങന്മാരെത്ര ?

ബൗധായന സിദ്ധാന്തം എന്ന പൈതഗോറസ് തിയറം

പൈതഗോറസ്, തിയറം കണ്ടുപിടക്കുന്നതിന് നൂറ്റാണ്ടുകൾക്കു മുമ്പ് ഭാരതീയ ഗണിതജ്ഞന്മാർ ആ സിദ്ധാന്തം ഉദാഹരണസഹിതം വിവരിച്ചിട്ടുണ്ട്. യാഗ കർമ്മങ്ങൾക്കടിസ്ഥാനഗ്രന്ഥമായ സുൽബസൂത്രത്തിലാണ് ഈ വിവരണം നൽകിയിരിക്കുന്നത്. ബൗധായന-കാത്യായന- ആപസ്തംബ-മാനവ സുൽബസൂത്രങ്ങളിലെല്ലാം താത്വീകമായും പ്രായോഗികമായും പൈതഗോറസ് തിയറം വിവരിക്കുന്നുണ്ട്.

ദീർഘചതുരശ്രസ്യ ക്ഷ്ണയാ രജ്ജു : പാർശ്വമാനി
തിര്യന്മാനി ച യത് പൃഥഗ്ഭൂതെ കരുതസ്തദ് ഉഭയം കരോതി

ഒരു ദീർഘചതുരത്തിലെ നീളം, വീതി ഇവ വശങ്ങളായി വരുന്ന രണ്ടു സമചതുരങ്ങളുടെ വിസ്തീർണത്തിന്റെ തുകയായിരിക്കും ഡയഗണൽ വശമായി വരുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം.

പൈതഗോറസ് ജനിക്കുന്നതിന് നൂറ്റാണ്ടുകൾക്കുമുമ്പാണ് ഈ സിദ്ധാന്തം ബൗധായന സുൽബസൂത്രത്തിലെഴുതിയത്. (900/700 BC)

സമചതുരത്തിന്റെ ഡയഗണൽ

സമചതുരശ്രസ്യ ക്ഷ്ണയാരജ്ജു ദ്വിഷ്ടാപതിം ഭൂമിം കരോതി.

സമചതുരത്തിന്റെ ഡയഗണൽ വശമായിവരുന്ന സമചതുരം ആദ്യസമചതുരത്തിന്റെ ഇരട്ടി വിസ്തീർണ്ണത്തിലുള്ളതായിരിക്കും. (അതായത് സമചതുരത്തിന്റെ ഡയഗണൽ = $\sqrt{2} \times$ വശം)

രണ്ടിന്റെ സ്ക്വയർ റൂട്ട്

രണ്ടിന്റെ സ്ക്വയർ റൂട്ട് കണ്ടുപിടിക്കുവാനുള്ള ആദ്യത്തെ മാർഗം

വിവരിച്ചിരിക്കുന്നതും സുൽബസൂത്രങ്ങളിലാണ്. കാത്യായന സുൽബ സൂത്രത്തിലെ വരിയാണിത്

കരണീം തൃതീയേന, വർധയേത്തച്ച സ്വചതുർത്ഥേന
ആത്മ ചതു: ത്രിംശോനേന സവിശേഷ ഇതിവിശേഷ:

ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ കൂടെ അതിന്റെ മൂന്നിലൊന്നും, ആ മൂന്നിലൊന്നിന്റെ തന്നെ നാലിലൊന്നും കൂട്ടിയാൽ ലഭിക്കുന്ന മൂല്യത്തിൽ നിന്ന് മൂന്നിലൊന്നിന്റെ നാലിലൊന്നിന്റെ മുപ്പത്തിനാലിലൊന്നു കുറക്കണം.

$$a + \frac{a}{3} + \frac{a}{3 \times 4} - \frac{a}{3 \times 4 \times 34} = \sqrt{2}\ a$$

സമചതുരത്തിന്റെ നീളവും ഡയഗണലിന്റെ നീളവും അളന്നാൽ അതിൽ നിന്നു $\sqrt{2}$ ലഭിക്കും

ത്രികോണ ഗണിതം

ഭാസ്കരാചാര്യർ നൽകിയ ത്രികോണ ഗണിത പ്രശ്നം നോക്കുക.

അഷ്ടാദശകോച്ഛ്രേയോ വംശോ വാതേന പാതിതോ മൂലാത്
ഷഡ്ഗത്വാ̆ സൗ പതിതാസ്ത്രി ഭുജം കൃത്വാ ക്വ ഭഗ്നസ്യാത്

18 അടി ഉയരമുള്ള മുള ഇടക്കുവെച്ച് ഒടിഞ്ഞ്, മുകളറ്റം ഭൂമിയിൽ സ്പർശിച്ചത് മുളയുടെ പാദത്തിൽ നിന്ന് ആറടി അകലത്തിലാണെങ്കിൽ, മുള എത്ര ഉയരത്തിലാണ് ഒടിഞ്ഞത്?

ശ്രീധരാചാര്യന്റെ പാടിഗണിതത്തിൽ വിവിധ ജ്യോമട്രി രൂപങ്ങളെക്കുറിച്ച് ഇപ്രകാരം പറയുന്നു.

ആയതമ ചതുരശ്രേ ദ്വിത്രിസമഭുജേ വിഷമചതുരശ്രം സമവിഷമ ദ്വിസമഭുജത്ര്യ ശ്രണ്യഥ വൃത്തചാപേ ച. ക്ഷേത്രാണി ദശൈതാനി ഹി ഫലമേഷാം സാധയേത് സ്വകരണേന ഏതത് പരികൽപ്യാന്യേഷാം ഗജദന്തനേമി പൂർവാണാം.

സമചതുരം, സമചതുരശ്രം, സമചതുർഭുജം, സമഭുജത്രികോണം, വിഷമഭുജത്രികോണം, ഐസോസ്‌ലസ് ത്രികോണം, വൃത്തം, വൃത്തത്തിന്റെ ഭാഗങ്ങൾ, എന്നിപ്രകാരം പത്തുതരം ജ്യോമട്രികൾ രൂപങ്ങ

ളാണ് അടിസ്ഥാനപരമായിട്ടുള്ളത്. ഈ അടിസ്ഥാന രൂപങ്ങളാക്കി മാറ്റിയതിനുശേഷം, മറ്റേതൊരു ജ്യോമട്രി രൂപങ്ങളുടേയും നീളം വീതി, വിസ്തീർണം ഇവ കണ്ടുപിടിക്കാം. (അതായത് ആനയുടേയും എരുമയുടേയും ഉൾപ്പെടെ രൂപങ്ങൾ.)

ത്രികോണ വിസ്തീർണം

ത്ര ഭുജസ്യ ഫല ശരീരം സമദല കോടിഭുജാർദ്ധ സംവർഗഃ

ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം പാദത്തിന്റെ പകുതിയും ഉയരവും ഗുണിച്ചാൽ ലഭിക്കും - (ആര്യഭടീയം 499 AD)

ഭാസ്കരാചാര്യർ നൽകിയ ഗണിത പ്രശ്നം (628 AD)

സപ്താഷ്ട നവഭുജാനാം ക്ഷേത്രാണാം യത് ഫലം സമാനാം തു പഞ്ചശ്രവണസ്യ സഖേ ഷഡ് ഭൂ സംഖ്യാ ദ്വിതുല്യസ്യ

7, 8, 9 എന്നിപ്രകാരം വശങ്ങളുള്ള മൂന്നു ഇകിലാറ്ററൽ ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണവും 6 വശവും 5 ഉയരവുമുള്ള ഐസോസ്ലസ് ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

കർണത്രയോദശ സ്യാത് പഞ്ചദശാന്യോ മഹീദ്വിസപ്തൈവ വിഷമത്രിഭുജസ്യ സഖേ ഫല സംഖ്യാ കാ ഭവേദസ്യ.

ഒരു വിഷമ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം 13, മറ്റേവശം 15, പാദം 14 എങ്കിൽ ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണമെത്ര ?

ചതുർഭുജം - ദീർഘ ചതുരം

ഭാസ്കരഭാഷ്യത്തിലെ ഈ പ്രശ്നം ദീർഘചതുരത്തെക്കുറിച്ച് നൽകിയിരിക്കുന്ന അറിവിന്റെ അടിത്തട്ടിൽ നിന്ന് നമുക്ക് ദർശിക്കുവാൻ സാധിക്കും.

അഷ്ടൗ പഞ്ച ച പങ്‌തിർ വിസ്താരേ ദൈർഘ്യമപ്യമീഷാം യത് അഷ്ടിർ ദ്വാദശ മനവോ ഗണിതം കിയദായതാനാം ത്

മൂന്ന് ദീർഘചതുരങ്ങളുടെ വീതി 8, 5, 10 എന്നീ ക്രമത്തിലും നീളം 16, 12, 14 എന്നീ ക്രമത്തിലുമാണെങ്കിൽ അവയുടെ വിസ്തീർണ്ണം എത്ര വീതമായിരിക്കും

ട്രിപ്പീസിയത്തിന്റെ വിസ്തീർണം

ആര്യഭടനാണ് ട്രിപ്പീസിയത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനുള്ള ഗണിത ഫോർമുല വ്യക്തമായ തെളിവോടെ വിവരിച്ചത്. അതുപയോഗിച്ചുള്ള ഗണിതക്രിയ ഇവിടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു.

ഭൂമി ശ്ചതുർദശസ്യാത് വദനം ചൈവ രൂപാണി
കർണോ ത്രയോദശാഗ്രൗ സംപാതാഗ്രം ഫലം ച വദ

ഒരു ട്രപ്പീസിയത്തിന്റെ പാദം 14, മുഖം 4 വശങ്ങൾ 13 എങ്കിൽ ഡയഗണൽ സ്പർശിക്കുന്ന ദൂരവും വിസ്തീർണവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

ചതുർഭുജങ്ങൾ - ക്വാഡ്രിലാറ്ററൽസ്

വശങ്ങൾ വ്യത്യസ്തമായ അളവുകളുള്ള ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുവാനുള്ള മാർഗം ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ വിവരിച്ചിട്ടുണ്ട്. (629 AD). ഇതേ നിയമം ശ്രീധരാചാര്യർ പാടീഗണിതത്തിൽ വിവരിക്കുന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

ഭുജയുതിദലം ചതുർത്ഥ ഭുജഹീനം തദ്ധാൽപദം ഗണിതം
സദശാ സമലംബാനാമസദൃശലംബേ വിഷമബാഹൗ

നാലു വശങ്ങളുടെയും അളവുകളുടെ തുകയായ ചുറ്റളവിന്റെ പകുതിയിൽ നിന്നും ഓരോ ഭുജത്തിന്റേയും നീളം വേറെ വേറെ കുറച്ച് ഇപ്രകാരം നാലു മൂല്യങ്ങളും ചുറ്റളവിന്റെ പകുതിയും പരസ്പരം ഗുണിച്ച് അതിന്റെ സ്കചയർ റൂട്ട് എടുത്താൽ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണം ലഭിക്കും.

അതായത് ചതുർഭുജവിസ്തീർണം = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

ഇവിടെ S ചുറ്റളവിന്റെ പകുതി. a, b, c, d ഇവ നാലു വശങ്ങൾ.

π യുടെ മൂല്യവിവരണം

കൃത്യമായ അളവിൽ π യുടെ മൂല്യം നൽകുന്ന ജ്യോമട്രി ബന്ധം വിവരിച്ചിരിക്കുന്ന വരികൾ ആര്യഭടന്റേതാണ്. ആര്യഭടീയത്തിലാണ് (499 AD) വ്യക്തമായി ഒരു നിർവചനവും π ക്ക് നൽകിയിരിക്കുന്നത്.

ചതുരധികം ശതം അഷ്ടഗുണം ദ്വാഷഷ്ടിസ്തഥാ സഹസ്രാണാം
അയുത ദ്വയ വിഷ്കംഭസ്യാസന്നോ വൃത്ത പരിണാഹ:

നൂറിന്റെ കൂടെ നാലു കൂട്ടി (=104) എട്ടുകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് (=832) ലഭിക്കുന്ന സംഖ്യ 62000 ത്തോട് കൂട്ടിയാൽ, (=62832) 20,000 യൂണിറ്റ് വ്യാസമുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ ഏകദേശ ചുറ്റളവ് ലഭിക്കുന്നതായിരിക്കും അതായത് $\pi = 62832 \div 20000$ (ഈ മൂല്യം 'ഏകദേശം' ആയിരിക്കുമെന്നും ആര്യഭടൻ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

സർകംഫറൻസിൽനിന്ന് ഡയമീറ്റർ

നവ നവ യമ രാമാണാമഷ്ടഭിഃ ശരയമാംശഹീനാനാം
ഖ ഖ രസവൃന്ദസ്യ ചമേ വ്യാസാവചക്ഷ വിഗണസ്യ

(ഇവിടെ ഭാസ്കരാചാര്യർ ഭൂതസംഖ്യയുപയോഗിച്ചാണ് ഗണിതപ്രശ്നം നൽകിയിരിക്കുന്നുത്) രണ്ട് വൃത്തങ്ങളുടെ ചുറ്റളവ് 3299 – $^{8}/_{25}$ ഉം 21600 ആണെങ്കിൽ അവയുടെ വ്യാസം കണ്ടുപിടിക്കുക.

സൈക്ളിക് പോളിഗണൽ രൂപങ്ങൾ

വിവിധ ജ്യോമട്രിക് രൂപങ്ങൾ കൃത്യമായി വൃത്തത്തിനകത്ത് ഉൾക്കൊള്ളിക്കുവാൻ സാധിക്കുമല്ലോ. അപ്രകാരം നമുക്ക് സൈക്ളിക് ത്രികോണം, സമചതുരം പഞ്ചഭുജം, ഷഡ്ഭുജം, സപ്തഭുജം, അഷ്ടഭുജം, നവഭുജം എന്നിവ ലഭിക്കുന്നു. (സ്ക്വയർ, പെന്റഗൺ, ഹെക്സഗൺ, സെപ്റ്റഗൺ, ഒക്റ്റഗൺ, നൊനഗൺ എന്നിപ്രകാരം) ഈ സൈക്ളിക് രൂപങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ അളവും അതുൾക്കൊള്ളുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ ഡയമീറ്ററും തമ്മിൽ കൃത്യമായ ബന്ധമുണ്ട്. ഡയമീറ്ററിനെ ഓരോ പ്രത്യേക മൂല്യം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ആ ഡയമീറ്ററുള്ള വൃത്തത്തിൽ കൊള്ളിക്കാവുന്ന പോളിഗണലുകളുടെ വശത്തിന്റെ അളവു ലഭിക്കുമെന്നർത്ഥം.

ഭൂതസംഖ്യയുപയോഗിച്ച് ഭാസ്കരാചാര്യർ (II) (1148 എ.ഡി) ലീലാവതി എന്ന ഗ്രന്ഥത്തിൽ നൽകിയിരിക്കുന്ന ഗണിതക്രിയ.

ത്രി അബ്ദാങ്കാഗ്നിഭശ്ചന്ദ്രൈ (103923) സ്ത്രി ബാണാഷ്ട യുഗാഷ്ടഭിഃ (84853) വേദാഗ്നി ബാണാഖ സപ്തൈശ്ച(70534) ഖഖാഭ്രാഭ്രരസൈഃ (60000) ക്രമാത് ബാണേഷു നഖബാണൈശ്ച (52055) ദ്വിദ്വിനന്ദേഷു സാഗരൈഃ (45922) കുരാമദശവേദൈശ്ച (41031) വൃത്തവ്യാസേ സമാഹതേ ഖഖഖാഭ്രാർക' (120000) സംഭക്തേ ലഭ്യന്തേ ക്രമശോഭുജാഃ വൃത്താന്തസ്ത്ര്യസ്ര പൂർവാണാം നവാസ്രാന്തം പൃഥക് പൃഥക്

ഇവിടെ സൈക്ളിക് ത്രികോണം മുതൽക്കുള്ള രൂപങ്ങളുടെ വശം അതുൾക്കൊണ്ട വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിൽ നിന്നു കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ഗുണിക്കേണ്ടതായ സംഖ്യയും ഹരിക്കേണ്ടതായ സംഖ്യയുമാണ് നൽകിയിരിക്കുന്നത്.

വൃത്തവ്യാസത്തെ 103923 കൊണ്ടുഗുണിച്ച് 120000 ഹരിച്ചാൽ ആ വൃത്തത്തിലുൾക്കൊള്ളുന്ന സമത്രികോണത്തിന്റെ വശം ലഭിക്കും. വ്യാസത്തെ 84853 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് 120000 ഹരിച്ച് ആ വൃത്തത്തിലുൾക്കൊള്ളുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ വശം ലഭിക്കും. ഇപ്രകാരം 70534, 60000, 52055, 45922, 41031 എന്നിവകൊണ്ട് വ്യാസത്തെ ഗുണിച്ച് 120000 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ, പെന്റഗൺ, ഹെക്സഗൺ, സെപ്റ്റഗൺ, ഒക്റ്റഗൺ, നൊനഗൺ എന്നിവയുടെ വശങ്ങൾ കൃത്യമായി ലഭിക്കും.

2000 യൂണിറ്റ് ഡയമീറ്ററുള്ള വൃത്തത്തിൽ ഓരോന്നും വെക്കുകയാണെങ്കിൽ ആ രൂപങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം ഭാസ്കരൻ നൽകിയിരിക്കുന്നതും ആധുനീകശാസ്ത്രം ഗണിച്ചിരിക്കുന്നതും നോക്കാം.

	ഭാസകരാചാര്യർ നൽകിയ മൂല്യം	ആധുനികശാസ്ത്ര പ്രകാരമുള്ള മൂല്യം
ത്രികോണം	1732.05	1732.04
സമചതുരം	1414.01	1414.21
പഞ്ചഭുജം	1175.56	1175.56
ഷഡ്ഭുജം	1000.00	999.996
സപ്തഭുജം	867.58	867.58
അഷ്ടഭുജം	765.36	765.36
നവഭുജം	683.85	683.85

രണ്ടായിരം യൂണിറ്റ് ഡയമീറ്ററുള്ള വൃത്തത്തിൽ ഉൾക്കൊള്ളിക്കാവുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ വശം 1732.05 യൂണിറ്റായിരിക്കും. സമചതുരത്തിന്റെ വശം 1414.21 ആയിരിക്കും. അതുപോലെ മറ്റ് രൂപങ്ങൾക്കു ഭാസ്കരാചാര്യരുടെ ഗണിതമാർഗ്ഗം എത്രത്തോളം കൃത്യമായിരുന്നു എന്ന് ഇവിടെ വ്യക്തമാകുന്നുണ്ടല്ലോ!

വ്യാപ്തം

വിവിധ രൂപങ്ങളുടെ വശം, ഡയഗണൽ, വിസ്തീർണം എന്നിവയുടെ ഗഹനമായ അറിവ് ഭാരതീയർക്കുണ്ടായിരുന്നു എന്നു വ്യക്തം. ഇനി വ്യാപ്തം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനെക്കുറിച്ചുള്ള അവരുടെ ജ്ഞാനം പരിശോധിക്കാം., ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ, ബ്രഹ്മസ്ഫുടസിദ്ധാന്തത്തിൽ നൽകിയിരിക്കുന്നത് ഇപ്രകാരമാണ്.

മുഖതല യുതിദല ഗുണിതം വേധഗുണം............ പ്രതലവിസ്തീർണത്തെ ഉയരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചൽ വ്യാപ്തം ലഭിക്കും.

ഇതേ സന്ദേശം ഭാസ്കരാചാര്യൻ (II) നൽകുന്നുണ്ട്. *ക്ഷേത്രഫലം സമമേവം വേധഹൃതം ഘനഫലം സ്പഷ്ടം.*

പ്രതലവിസ്തീർണത്തെ ഉയരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ വ്യാപ്തം ലഭിക്കുമെന്നത് സ്പഷ്ടമാണ്.

ലീലാവതിയിൽ നിന്നുള്ള ഒരു ഗണിതാഭ്യാസം :

ഖാതേഽഥ തിഗ്മകരതുല്യ ചതുർഭുജേ ച കിംസ്യാത് ഫലം നവമിതഃ കിലയത്രവേധഃ വൃത്തേ തഥൈവ ദശവിസ്തൃതി പഞ്ചവേധേ സൂചീഫലം വദ തയോശ്ച പൃഥക് പൃഥക്മേ.

പ്രതലം 12 യൂണിറ്റ് വശമുള്ള സമചതുരവും ഉയരം 9 യൂണിറ്റും ഉള്ള ഒരു ദീർഘചതുരഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കണ്ടുപിടിക്കുക. 10 യൂണിറ്റ് ഡയമീറ്ററും 5 യൂണിറ്റ് ഉയരവുമുള്ള സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തവും കണ്ടുപിടിക്കുക. കൂടാതെ പിരമിഡും കോണും ആയിരുന്നുവെങ്കിൽ രണ്ടിന്റേയും വ്യാപ്തം എത്രയായിരിക്കും.

കോണിന്റെ വ്യാപ്തം

ലീലാവതിയിൽ കോണിന്റെ വ്യാപ്തം, നൽകുന്നതിപ്രകാരമാണ്.

സമഖാതഫലത്ര്യംശഃ സൂചീഖാതേ ഫലം ഭവതി.

ഒരു സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണ് കോണിന്റെ വ്യാപ്തം.

ഭാഗികമായ കോൺരൂപങ്ങളുടെ വ്യാപ്തം

കോണുകൾ, പകുതി, കാൽഭാഗം, മുക്കാൽഭാഗം എന്നിപ്രകാര മുള്ളവയുടെ വ്യാപ്തം കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രസകരമായ ഒരു പ്രായോ ഗിക ഉദാഹരണം ഭാസ്കരാചാര്യർ നൽകിയിട്ടുണ്ട്. (ലീലാവതി)

പരിധിർഭിത്തിലഗ്നസ്യ രാശേത്രിംശത്കരഃ കില
അന്തഃകോണ സ്ഥിതസ്യാപി തിഥി തുല്യകര സഖേ
ബഹിഷ്കോണ സ്ഥിതസ്യാപി പഞ്ചഘ്നനവ സമ്മിതഃ തേഷാമാ
ചക്ഷ്വ മേ ക്ഷിപ്രം ഘന ഹസ്താത് പൃഥക് പൃഥക്

30 അടി ചുറ്റളവിൽ കോൺ ആകൃതിയിൽ നിലത്ത് ധാന്യം കൂട്ടി യിട്ടിരിക്കുന്നു. മുറിയുടെ പുറത്തും അതുപോലെ അകത്തുമുള്ള കോണിലും (മൂലക്കും) ഇപ്രകാരം ധാന്യം കൂട്ടിയിട്ടുണ്ട്. കൂടാതെ ചുമ രിന്റെ ഒരു വശത്ത് ധാന്യം കൂട്ടിയിട്ടിട്ടുണ്ട്. (ഇവയെല്ലാം ചുമരിനോട് ചേർന്നാണ് കിടക്കുന്നതെങ്കിൽ) ഇവയുടെ ഉയരമെല്ലാം 15 ഹസ്തം എങ്കിൽ ഓരോ കൂനയിലുമുള്ള ധാന്യത്തിന്റെ വ്യാപ്തമെത്ര?

ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

ഭാസ്കരാചാര്യൻ രണ്ടാമൻ ലീലാവതിയിൽ ഗോളത്തിന്റെ പൂർണ ഗണിത വിവരണസൂത്രം നൽകുന്നുണ്ട്.

വൃത്തക്ഷേത്രേ പരിധി ഗുണിത വ്യാസപാദ ഫലം തത്ക്ഷുണ്ണം
വേദൈരുപരിപരതഃ കന്ദുകസ്യേവജാലം ഗോളസ്യൈവം തദപി ച
ഫലം പൃഷ്ഠ ജം വ്യാസനിഘ്നം ഷഡ്ഭിർഭക്തം ഭവതി നിയതം
ഗോളഗർഭേ ഘനാഖ്യം

ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനെ വ്യാസം കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് ലഭി ക്കുന്ന സംഖ്യയെ 4 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ വൃത്തവിസ്തീർണം ലഭിക്കും. അതിനെ നാലുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഗോളത്തിന്റെ ബാഹ്യവി സ്തീർണം ലഭിക്കും. ഇതിനെ വീണ്ടും വ്യാസം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 6 കൊണ്ടു ഭാഗിച്ചാൽ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം ലഭിക്കും. അതായത്

$4\pi r^2 \times 2r \times 2r \times 1/6 = 4/3\, \pi r^3$

തിയറങ്ങൾ

തന്ത്രസംഗ്രഹത്തിൽ നൽകിയിരിക്കുന്ന തിയറം

വ്യാസേ വാരിധി നിഹതേ രൂപഹതേ, വ്യാസ സാഗരാഭിഹതേ സ്ത്രി ശരാദിവിഷമസംഖ്യാ ഭക്തമൃണം സ്വം പൃഥക് ക്രമാത് കുര്യാത്.

വ്യാസത്തെ നാലുകൊണ്ട് ഗുണിച്ച് ഒന്നുകൊണ്ട് ഹരിച്ചു ലഭിക്കുന്ന മൂല്യത്തോട്, വ്യാസത്തെ നാലുകൊണ്ട് ഗുണിച്ച് 3, 5, ... തുടങ്ങിയ ഒറ്റ സംഖ്യകൾ കൊണ്ട് വേറെ വേറെ ഭാഗിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്ന ഫലങ്ങൾ യഥാക്രമം കുറക്കുകയും കൂട്ടുകയും ചെയ്താൽ വൃത്തത്തിന്റെ സർക്കംഫറൻസ് ലഭിക്കും.

$$\text{സർക്കംഫറൻസ്} = 4D - \frac{4D}{3} + \frac{4D}{5} - \frac{4D}{7} \ldots\ldots$$

പുതുമന സോമയാജി (1448 AD) കരണപദ്ധതി എന്ന ഉജ്ജ്വല ഗ്രന്ഥത്തിൽ നൽകിയിരിക്കുന്ന അനേകം തിയറങ്ങളിൽ ചിലത്.

വ്യാസാദ്വനസംഗുണിതാത്പൃഥ ഗാപ്തം ത്ര്യാദ്യയുഗ് വിമൂല ഘനൈഃ ത്രിഗുണവ്യാസേ സ്വം ഋണം ക്രമശഃ കൃത്വാപി പരിധിരാനേയുഃ

വ്യാസത്തെ നാലുകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് പല സ്ഥലത്തുവച്ച് അവയെ യഥാക്രമം 3, 5, 7 എന്നീ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ഘനത്തിൽ നിന്ന് (ക്യൂബിൽ നിന്ന്) അതാതു ഒറ്റസംഖ്യ കുറച്ചു ലഭിക്കുന്ന മൂല്യം കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്നത്, വ്യാസത്തിന്റെ മൂന്നിരട്ടിയോട് യഥാക്രമം കൂട്ടുകയും കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താൽ വൃത്തപരിധി (ചുറ്റളവ്) ലഭിക്കും.

$$\text{സർക്കംഫറൻസ്} = 3D + \frac{4D}{3^3-3} - \frac{4D}{5^3-5} + \frac{4D}{7^3-7} \ldots\ldots$$

സ്വൽപചാപഘനഷഷ്ഠ ഭാഗതോ വിസ്തരാർദ്ധ കൃതിർഭക്ത വർജ്ജിതം ശിഷ്ടചാപമിഹശിഞ്ജനീ ഭവേത് തദ്യുതോത്ക്രമപകഗുണോ സകൃത്ധനുഃ

(കരണപദ്ധതിയിലെ ഈ തിയറത്തിലൂടെ പുതുമന സോമയാജി വിവരിക്കുന്നത്) ഒരു ആർക്കിന്റെ കോഡ് ലഭിക്കുവാൻ, ആ ആർക്കിന്റെ നീളത്തിന്റെ ക്യൂബെടുത്ത്, വ്യാസാർധത്തിന്റെ ക്യൂബിന്റെ ആറിരട്ടിയുപയോഗിച്ച് ഹരിച്ച് ലഭിക്കുന്ന സംഖ്യ ആർക്കിന്റെ നീളത്തിൽ നിന്നു കുറച്ചാൽ മതിയാകും.

$$\text{കോഡ്} = S\ (\text{ആർക്ക്}) - \frac{S^3}{6R^3}$$

വർഗൈർയുജാം വാ ദ്വിഗുണൈർനിരേകൈർ-
വർഗീകൃതൈർ വർജ്ജിത യുഗ്മ വർഗൈഃ
വ്യാസം ച ഷഡ്ഘ്നം വിഭജേത് ഫലം സ്വം
വ്യാസേ ത്രിനിഘ്നേ പരിധിസ്തദാസ്യാത്

ഇരട്ട സംഖ്യകളുടെ സ്ക്വയറെടുത്ത്, രണ്ടു കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അതിൽ നിന്ന് ഒന്ന് കുറച്ച് ലഭിക്കുന്നതിന്റെ സ്ക്വയറെടുത്ത് അതിൽ നിന്ന് ആ ഇരട്ടസംഖ്യയുടെ വർഗം കുറച്ച് ലഭിക്കുന്ന മൂല്യം ഉപയോഗിച്ച് വ്യാസത്തിന്റെ അറിരട്ടിയെ ഹരിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്ന ഫലങ്ങൾ, വ്യാസത്തിന്റെ മൂന്നിരട്ടിയോട് യഥാക്രമം കൂട്ടുകയും കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താൽ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് ലഭിക്കും.

(മേൽ വിവരിച്ച പ്രകാരം 2,4,6.......... എന്നിപ്രകാരമുള്ള ഇരട്ടസംഖ്യകളുപയോഗിച്ചാണ് ക്രിയ ചെയ്യേണ്ടത്) ഗണിതരൂപത്തിലെഴുതിയാൽ

വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് =

$$3\,D + \frac{6\,D}{(2x2^2-1)^2 - 2^2} + \frac{6D}{(2x4^2-1)^2 - 4^2} + \frac{6D}{(2x6^2-1)^2 - 6^2} + \cdots\cdots\cdots$$

ഗുണഹാരക ഭൂതൈസ്തൈർ വ്യാസവൃത്തൈർയദോദിതം
ഇഷ്ട വൃത്താന്നയേദ് വ്യാസം വ്യാസാദ് വൃത്തം വിപര്യയാത്

സർക്കംഫറൻസും, വ്യാസവും അറിയാവുന്ന ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ, ഇതിലേതെങ്കിലും ഒന്നുമാത്രം അറിയാവുന്ന മറ്റൊരു വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ടാമത്തെ അളവ് കണ്ടുപിടിക്കുവാൻ സാധിക്കും. സർക്കംഫറൻസും, ഡയമീറ്ററും തമ്മിലുള്ള റേഷ്യോ (π) ഒരു കൃത്യസംഖ്യയായതിനാൽ ഇപ്രകാരം സംഭവിക്കുന്നത്. വ്യാസത്തിൽ നിന്ന് സർക്കംഫറൻസും അതുപോലെ മറിച്ചും കണ്ടുപിടിക്കാം.

കടപയാദി സംഖ്യാ സമ്പ്രദായത്തിലൂടെ പുതുമന സോമയാജി നൽകിയിരിക്കുന്ന ഗണിത സൂക്തം നോക്കുക.

അനൂനനൂത്നാനനനൂനനിത്യൈ
സ്സമാഹതാശ്ചക്ര കലാ വിഭക്താഃ
ചണ്ഡാംശുചന്ദ്രാധമകുംഭിപാലൈർ-
വ്യാസസ്തദർദ്ധം ത്രിഭമൗർവികസ്യാത്.

10000000000 വ്യാസമുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്/ സർക്കംഫറൻസ് 31415926536 ആയിരിക്കും.

ക്രിയാക്രമകരി എന്ന പുരാതന സംസ്കൃതഗ്രന്ഥത്തിൽ മാധവാചാര്യർ നൽകിയിരിക്കുന്ന C-D ബന്ധം, ഭൂതസംഖ്യ അറിയാവുന്നവർക്ക് എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാകും.

വിഭൂതനേത്രഗജാഹി ഹുതാശനാത്രിഗുണവേദ ഭാവാരണ്യ ബാഹവ:
നവ നിഖർവ മിതേ വൃതി വിസ്തരേ പരിധിമാനം ഇദം ജഗദുർബുധാ:

9" യൂണിറ്റ് വ്യാസമുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 2 8 2 7 4 3 3 3 8 8 2 3 3 യൂണിറ്റായിരിക്കും.

വൃത്ത ആർക് - കോഡ്

ആര്യഭടീയത്തിലെ (499 AD) ഈ വരി ഇന്നും ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ ഒരു പ്രധാന തിയറമായി പഠിപ്പിക്കുന്നു. ഇത് ആര്യഭടനാണ് കണ്ടുപിടിച്ചതെന്ന് നാം ഓർമ്മിപ്പിക്കാറില്ല.

പരിധേ : ഷഡ്ഭാഗജ്യാ: വിഷ്കംഭാർധേന സാ തുല്യാ

വൃത്തപരിധിയെ ആറായി ഭാഗിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്ന ആർക്കിന്റെ കോഡ്, ആ വൃത്തത്തിന്റെ റേഡിയസിനു തുല്യമായിരിക്കും.

ചുറ്റളവ് - വ്യാസം - കോഡ് ബന്ധം

ലീലാവതിയിലെ ശ്രദ്ധേയമായ ഒരു സങ്കീർണ തിയറം

വ്യാസബ്ധിഘ്നാതയുതമൗർവികയാ വിഭക്തോ-
ജീവാങ്ഘ്രി പഞ്ച ഗുണിത: പരിധേസ്തു വർഗ:
ലബ്ധോനിതാത് പരിധി വർഗ ചതുർത്ഥ ഭാഗാ-
ദാപ്തേ പദേ വൃതിദലാത് പതിതേധനു: സ്യാത്

സർക്കംഫറൻസിന്റെ സ്ക്വയറിനെ കോഡ് കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിന്റെ അഞ്ചിരട്ടിയെ, സർക്കംഫറൻസും കോഡും കൂട്ടിയതിന്റെ നാല് ഇരട്ടി ഉപയോഗിച്ച് ഹരിക്കുക. ലഭിക്കുന്നത്, സർക്കംഫറൻസിന്റെ സ്ക്വയറിന്റെ കാൽ ഭാഗത്തിൽ നിന്നും കുറക്കുക. ലഭിക്കുന്നതിന്റെ സ്ക്വയർ റൂട്ട് എടുക്കുക. ഇതിനെ, സർക്കംഫറൻസിന്റെ പകുതിയിൽ നിന്നു കുറച്ചാൽ ആർക്ക് ലഭിക്കും.

ഇതേ ആർക്കിന്റെ കോഡ് ലഭിക്കുവാൻ, ലീലാവതിയിലെ മറ്റൊരു വിവരണം ശ്രദ്ധേയമാണ്.

ചാപോനനിഘ്ന പരിധി: പ്രഥമാഹ്വയ: സ്യാത്
പഞ്ചാഹത: പരിധി വർഗ ചതുർത്ഥ ഭാഗ:
ആദ്യോ നിതേന ഖലു തേന ഭജേച്ചതുർഘ്ന
വ്യാസാഹതം പ്രഥമ മാപ്ത മിഹ ജ്യകാ സ്യാത്.

സർക്കംഫറൻസിൽ നിന്ന് ആർക്ക് കുറച്ചു ലഭിക്കുന്നതിനെ ആർക്ക് കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക. ഇത്, സർക്കംഫറൻസിന്റെ സ്ക്വയറിന്റെ $^5/_4$ ഭാഗത്തിൽ നിന്ന് കുറക്കുക. ലഭിക്കുന്നത് y എന്ന് വിചാരിക്കുക.

വീണ്ടും സർക്കംഫറൻസിൽ നിന്ന് ആർക്ക് കുറച്ചു ലഭിക്കുന്ന മൂല്യത്തെ വ്യാസത്തിന്റെ നാലിരട്ടികൊണ്ടും ആർക്കുകൊണ്ടും ഗുണിക്കുക. ഇത് x എന്ന് വിചാരിക്കുക.

x ൽ നിന്ന് y കുറച്ചാൽ ആ ആർക്കിന്റെ കോഡിന്റെ നീളം ലഭിക്കും.

ആരോ – കോഡ് – ഡയമീറ്റർ

ജ്യാവ്യാസയോഗാന്തരഘാതമൂലം വ്യാസസ്തദൂനോ ദളിത ശര: സ്യാത്
വ്യാസാത്ച്ഛരോനാ ച്ഛരസംഗുണാ ച മൂലം ദ്വിനിഘ്നം ഭവതീഹ ജീവാ
ജീവാർദ്ധ വർഗേ ശരഭക്തയുക്തേ വ്യാസ പ്രമാണം പ്രവദന്തി വൃത്തേ

(ലീലാവതിയിലെ വിവരണം) വ്യാസത്തിന്റെയും (D) കോഡിന്റെയും (C) തുകയും വ്യത്യാസവും തമ്മിൽ ഗുണിക്കുക [(D+C)(D-C)] അതിന്റെ സ്ക്വയർ റൂട്ട് എടുത്ത് പകുതിയാക്കി ഡയമീറ്ററിൽ നിന്നു കുറച്ചാൽ 'ആരോ' (A) ലഭിക്കും. വ്യാസത്തിന്റേയും ആരോയുടേയും വ്യത്യാസ (D-A) ത്തെ ആരൊകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് A(D-A) അതിന്റെ ഇരട്ടിയുടെ സ്ക്വയർ റൂട്ടെടുത്താൽ കോഡ് ലഭിക്കും.

പുതുമനസോമയാജി കരണപദ്ധതിയിൽ നൽകിയിരിക്കുന്ന വിവരണം.

യദ്വേഷ്ഠചാപഗുണതച്ഛരവർഗ യോഗ
മൂലാർദ്ധമിഷ്ട ധനുരർദ്ധ ഗുണ പ്രദിഷ്ട:
ജ്യാനാം നിജ ത്രിഗുണ വർഗ വിശേഷ മൂലം
കോടിസ്തദൂന സഹിതൗ ത്രിഗുണൗ സ്വ ഭാണൗ

കോഡിന്റെ സ്ക്വയറിൽ നിന്ന് റേഡിയസ്സിന്റെ സ്ക്വയർ കുറച്ചാൽ കോടി ലഭിക്കും. (R. Cos θ) ഈ കോടി, റേഡിയസ്സിൽ നിന്നു

കുറച്ചാൽ ചെറിയ ആരോ ലഭിക്കും. ഇത് റേഡിയസ്സിനോട് ചേർത്താൽ വലിയ ആരോ ലഭിക്കും.

ആംഗുലർ അളവുകൾ

വൃത്തത്തിന്റെ ആംഗിൾ 360° ആണെന്ന് നമുക്കെല്ലാവർക്കുമറിയാം. ത്രികോണത്തിന്റെ ആകെ ആംഗിൾ 180°. ഇപ്രകാരം വിവിധ ജ്യോമട്രിക് രൂപങ്ങൾക്ക് നാം ഡിഗ്രി ആംഗിൾ അളവാണ് ഉപയോഗിക്കാറുള്ളത്. ആംഗിൾ അളവുകൾ ഭാരതീയ ഗണിത ജ്യോതിശാസ്ത്രജ്ഞന്മാർ സർവസാധാരണയായി ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. ഇതുകൂടാതെ ആംഗിൾ അളവുകൾ റേഡിയൻ ആയും ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്. അതിന്റെ അടിസ്ഥാനം $2\pi r = 360$ എന്നതിൽ നിന്ന് $r = 360/2\pi$ എന്നുപയോഗിക്കുന്നതാണ്. ഇവിടെ ഡിഗ്രിയിൽ ഉപയോഗിച്ചാൽ $r = 57.27$ ലഭിക്കും. ഇതിനെ ആംഗുലർ മിനിറ്റാക്കിയാൽ (x 60) 3436.3 മിനിറ്റ് എന്നു ലഭിക്കും. 1300 വർഷങ്ങൾക്കുമുമ്പ് എഴുതിയ വടേശ്വരസിദ്ധാന്തത്തിലെ വിവരണം നോക്കുക. ഭൂതസംഖ്യയിലൂടെയാണിതെഴുതിയിരിക്കുന്നത്.

അംഗഗുണവേദ ഹുതാശഃ കലികാ വികലാഃ സമുദ്രജലധയഃ സപ്ത ജലധാഷ്ട ശശി ധൃതി ശശിനഃ കലികാഃ ശരാഗ്നയോ വികലാഃ തൃജ്യാ കൃതിരഷ്ട നവത്രിഭൂവോ വിശേ ജിനാംശജ്യാ

3436′ (മിനിറ്റ്) 44″ (സെക്കന്റ്) ആണ് വൃത്തത്തിന്റെ റേഡിയസ് (റേഡിയനിൽ) അതിന്റെ സ്വകയറാകട്ടെ 11818047′ 35″. R Sine 24° എന്നത് 1398′ 13″ ആകുന്നു.

ഇത്രയും കൃത്യമായ വിവരണം നൽകിയ വടേശ്വരനെ നാം ഓർമ്മിക്കുകപോലും ചെയ്യുന്നില്ല. ലല്ലാചാര്യൻ, ശിഷ്യധീ വൃദ്ധിതന്ത്രത്തിൽ ഇങ്ങിനെയെഴുതിയിരിക്കുന്നു.

*വസു അനലാബ്ധി വഹ്നയഃ ഇമാം ത്രിഭജ്യാമഥ ചക്രിലിപ്തികാ......
ജിനാംശ നഗഗോ ഗുണേന്ദവോ.....*

3438 ആകുന്നു വൃത്തത്തിന്റെ റേഡിയസ്. R Sine 24 എന്നത് 1397′ (മിനിറ്റ്) ആകുന്നു.

സൈൻ - കോസൈൻ - ടാൻജന്റ്

നാമെല്ലാവരും തെറ്റിദ്ധരിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു കാര്യമുണ്ട് സൈൻ, കോസൈൻ, ടാൻജന്റ് എന്നിവയെല്ലാം പാശ്ചാത്യരാണ് കണ്ടുപിടിച്ചതെന്ന്. സ്ക്വയർ റൂട്ട് കണ്ടുപിടിക്കുവാനോ ആറക്കസംഖ്യകളെഴുതുവാനോ പാശ്ചാത്യർക്കറിയാതിരുന്നകാലത്ത് ഈ ഗണിത തത്വമുപയോഗിച്ച് അനവധി ഗണിതക്രിയകൾ നടത്തിയവരായിരുന്നു നമ്മുടെ പൂർവ്വപിതാമഹന്മാർ. ഇന്നത്തെ ബിരുദാനന്തരബിരുദനിലവാരത്തിൽപോലും ചിന്തിക്കുവാൻ സാധിക്കാത്ത പലതും അവർ ലാഘവത്തോടെ തെളിയിച്ചു.

ആദ്യത്തെ സൈൻ ടേബിൾ ഭാരതീയന്റേത്

ലോകത്തിലാദ്യമായി സൈൻ മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുവാനുള്ള ടേബിൾ എഴുതിയത് 499 എ.ഡിയിൽ ആര്യഭടനാണ്. ആര്യഭടീയ സംഖ്യാ സമ്പ്രദായത്തിൽ എഴുതിയിരിക്കുന്ന ഇതിലെ മൂല്യവും തത്തുല്യമായ ആധുനിക മൂല്യവും (ബ്രാക്കറ്റിൽ) നൽകിയിരിക്കുന്നു.

മഖി ഭഖി ഫഖി ഘഖി ണഖി ഞഖി
ങഖി ഹസ്ഝ സ്കകി കിഷ്ഗ ശ്ഘകി കിഘ്വ
ഘ്ലകി കിഗ്ര ഹക്യ ധകി കിച്യ സ്ഗ
ശ്ഝ ങ്വ ക്ല പ്ത ഫ ഛ കലാർദ്ധജ്യാ

3°45′ (225 മിനിറ്റ്) ആംഗിൾ ക്രമത്തിൽ 0 മുതൽ 90 ഡിഗ്രി വരെയുള്ള ആംഗിളിന് (അതായത് 225, 450, 675 ....) സൈൻ മൂല്യമാണ് നൽകിയിരിക്കുന്നത്.

225	(224′.856)	224	(223′.893)	222	(221′.971)	219	(219′.100)
215	(215′.289)	210	(210′.557)	205	(204′.923)	199	(198′.411)
191	(191′.050)	183	(182′.872)	174	(173′.909)	164	(164′.033)
154	(153′.792)	143	(142′.724)	131	(131′.043)	119	(118′.803)
106	(106′.053)	93	(92′.850)	79	(79′.248)	65	(65′.307)
51	(51′.087)	37	(36′.648)	22	(22′.051)	7	(7′.361)

ഈ ടേബിൾ ഉപയോഗിച്ച് 0 നു മുകളിൽ 90 ഡിഗ്രിക്കു താഴെയുള്ള ഏത് ആംഗിൾ മൂല്യത്തിന്റേയും സൈൻമൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണ്. അതിനുള്ള മാർഗം ഭാസ്കരാചാര്യൻ (I) വിവരിക്കുന്നത് (628 എ.ഡി) ഇപ്രകാരമാണ്.

ലിപ്തീകൃത്യ ഹരേന മഖ്യാ ജീവാ ലബ്ധസ്തതഃ പുനഃ
വർത്തമാനാഹതം ശേഷം മഖ്യാച്ചൈവ വിഭാജയേത്
പൂർവസങ്കലിതേ യുക്തേ ജ്യാക്രമേണോൽക്രമേണ വാ
സ്വ പരിധ്യാഹതേ്ശീത്യാ ലബ്ധം ക്ഷയധനം ഫലം

ഓരോ ആർക്കിന്റേയും ആംഗുലർ അളവിനെ (60 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്) മിനിറ്റുകളിലാക്കി 225 കൊണ്ടു ഹരിച്ച് ലഭിക്കുന്ന ഹരണഫലം, ആര്യഭടന്റെ ടേബിളുമായി ചേർത്ത് അതിൽനിന്ന് ലഭിക്കുന്ന സൈൻമൂല്യം ഒരിടത്തു വെക്കുക. ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം വരുന്നതിന് അതിന്റെ അടുത്ത സൈൻ മൂല്യം കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് 225′ കൊണ്ട് ഹരിക്കുക. ഇപ്പോൾ ലഭിക്കുന്നത് ആദ്യ ഹരണഫലത്തോട് ചേർത്താൽ ഇഷ്ടമുള്ള ആംഗുലർ അളവിന്റെ സൈൻ ലഭിക്കും.

ഇത് ജ്യോമട്രിക് മാർഗത്തിലൂടെ കണ്ടുപിടിക്കുവാനുള്ള സങ്കീർണമാണെന്നു തോന്നാവുന്ന രീതിയും ആര്യഭടൻ വ്യക്തമായി വിവരിക്കുന്നുണ്ട്.

സൈൻ – കോസൈൻ – റേഡിയസ് ബന്ധം

വടേശ്വരൻ നൽകുന്ന സൈൻ - കോസൈൻ - റേഡിയസ് ബന്ധങ്ങൾ ആധുനിക ഗണിതശാസ്ത്രമാണ്.

ത്രിജ്യാബാഹ്വാഗ്ര മൗർവ്യാഃ കൃതി വിവരപദേ
വേദരജ്യാ പ്രദിഷ്ടാ ബാഹ്വാഗ്രജ്യാ ത്രി മൗർവ്യോ-
ർവിവര യുതി ഹതേർമൂല മാഹസ്ത യോർവാ
വ്യസ്ത ജ്യാ – വ്യസ്തജീവാ വിരഹിത നിഹതേർയത്പദം
സ്യാൽക്രമജ്യാ വ്യാസഘ്നാ വ്യസ്തജീവാ നിജ
കൃതിരഹിതാ മൂലമസ്യാഃ ക്രമജ്യാ

ഇതിനെ ഗണിതത്തിലൂടെ തന്നെ എഴുതാം.

$$R \text{ കോസ് } a = \sqrt{R^2 - (R \text{ സൈൻ } a)^2}$$

$$R \text{ സൈൻ } a = \sqrt{R^2 - (R\text{കോസ് } a)^2}$$

$$R \text{ കോസ് } a = \sqrt{R\ (R-R \text{ സൈൻ } a)(R+R \text{ സൈൻ } a)}$$

$$R \text{ സൈൻ } a = \sqrt{R - R \text{ കോസ് } a\ (R + R \text{ കോസ് } a)}$$

കരണപദ്ധതിയിൽ പുതുമന സോമയാജി നൽകിയിരിക്കുന്നത്

യദേഷ്ട കോട്യാഹത വിസ്താർ ധേനോനാന്വിതൗ വ്യാസദളസ്യ വർഗൗ അർധീകൃതൗ തൗ പദിതാവഭീഷ്ട ചാപാർധ ദോഃ കോടി ഗുണൗ ഭവേതാം

ഇത് ഗണിതപ്രകാരം ഇങ്ങിനെയെഴുതുന്നു.

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\,(R^2 - R^2 \text{ കോസ് } a)} = R \text{ സൈൻ } {}^{a}/_{2}$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\,(R^2 + R^2 \text{ കോസ് } a)} = R \text{ കോസ് } {}^{a}/_{2}$$

അസാധാരണമായ ഒരു സൈൻ - കോസൈൻ മാർഗം

പുതുമന സോമയാജി (1448 AD) എഴുതിയിരിക്കുന്ന ഒരത്ഭുതകരമായ ഗണിതക്രിയ നോക്കുക.

ചാപാച്ച തത്തത് ഫലതോഽപി തദ്വത് ചാപാഹതാ ദ്വ്യാദി ഹതത്രിമൗർവ്യാ ലബ്ധാനി യുഗ്മാനി ഫലാന്യധോഽധശ്ചാപാദ യുഗ്മാനി ച വിസ്തരാർധാത് വിന്യസ്യ ചോപര്യുപരിത്യജേത് തത് ശേഷൗ ഭുജാ കോടിഗുണൗ ഭവേതാം.

ഒരു ആർക്കിന്റെ നീളത്തെ (a) ആവശ്യമനുസരിച്ച് (n) അതുകൊണ്ടുതന്നെ ഗുണിക്കുക (a^n)ഒരിക്കൽകൂടി ആർക്കുകൊണ്ടു ഗുണിക്കുക (a^{n+1}) . ഇപ്രകാരം ലഭിക്കുന്നതിനെ 2, 3, 4 .... (n = 2, n = 3, n = 4) എന്നിവകൊണ്ട് യഥാക്രമം (ഫാക്ടോറിയലായി) ഹരിക്കുക. (അതായത് n = 4 എങ്കിൽ 1 x 2 x 3 x 4 കൊണ്ട്) ഹരിച്ചു ലഭിക്കുന്നതിനെ യഥാക്രമത്തിൽ r^n കൊണ്ട് വീണ്ടും ഹരിക്കുക. ഇപ്രകാരം ലഭിക്കുന്ന ഓരോ ഫലത്തേയും ഒറ്റസംഖ്യ (n = 1, 3, 5, 7 .... A1, A3, A5, A7.......) എന്ന ക്രമത്തിലും ഇരട്ടസംഖ്യ (n = 2, 4, 6..... A2, A4, A5, A8) ക്രമത്തിലും വേർതിരിച്ചെഴുതുക. ഒന്നാം മൂല്യത്തിൽ നിന്ന് തൊട്ടടുത്ത മൂല്യം കുറക്കുക. ഈ ക്രിയ ഒറ്റസംഖ്യയിൽ ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നതിലും ഇരട്ടസംഖ്യയിൽ ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നതിലും ചെയ്യുക. (അതായത് $A_1 - A_3, A_5 - A_7, A_9 - A_{11}$ ......: അതുപോലെ $A_2 - A_4, A_6 - A_8, A_{10} - A_{12}$) ഒറ്റ സംഖ്യക്ക്

ലഭിച്ചിരിക്കുന്നതെല്ലാം റേഡിയസ്സിൽനിന്ന് കുറയ്ക്കുക. ഇരട്ടസംഖ്യകൾക്ക് ലഭിച്ചിരിക്കുന്നതെല്ലാം ആർക്കിൽനിന്ന് കുറയ്ക്കുക. യഥാക്രമം സൈൻ മൂല്യവും കോസൈൻ മൂല്യവും ലഭിക്കും. അതായത്

$$R \text{ സൈൻ } a = R - (A_1 - A_3) - (A_5 - A_7) - (A_9 - A_{11}) \ldots\ldots$$

$$R \text{ കോസ് } a = S - (A_2 - A_4) - (A_4 - A_6) - (A_8 - A_{10}) \ldots\ldots$$

അതായത് മറ്റൊരു രൂപത്തിലെഴുതിയാൽ

$$\text{സൈൻ } a = a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!} + \ldots\ldots$$

$$\text{കോസ് } a = a - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \ldots\ldots$$

(ഇവിടെ s ആർക്ക്, a ആംഗിൾ ! ചേർത്തിരിക്കുന്നത് ഫാക്ടോറിയൽ ക്രിയക്ക്)

ടാൻജന്റ് കണ്ടുപിടിച്ചുപയോഗിച്ചത് ഭാരതീയർ

കരണപദ്ധതിയിൽ പുതുമന സോമയാജി നൽകിയിരിക്കുന്ന ഗഹനമായ സൈൻ - കോസൈൻ - ടാൻജന്റ് ബന്ധം നോക്കുക.

വ്യാസാർദ്ധേന ഹതാദഭീഷ്ടഗുണതഃ കോട്യാപ്തമാദ്യം ഫലം ജ്യാവർഗേണ വിനിഘ്നമാദിമഫലം തത്തത്ഫലം ചാഹരേത് കൃത്വാ കോടിഗുണസ്യ തത്രതു ഫലേഷ്വേകത്രിപഞ്ചാദിഭിർ ഭക്തേഷ്വോ ജയുതൈസ്ത്യജേത് സമയുതിം ജീവാധനുഃശിഷ്യതേ

R സൈൻ a യെ റേഡിയസ് കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് R കോസ് a കൊണ്ട് ഹരിക്കുക. ഇത് ഒന്നാമത്തെ ഫലം (I) ഇതിനെ R സൈൻ a യുടെ വർഗം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് R കോസ് a യുടെ വർഗം കൊണ്ട് ഹരിക്കുക. രണ്ടാമത്തെ ഫലം ലഭിക്കും (II) ഈ ക്രിയ തുടരുക, 1, 3, 5 എന്ന അക്കങ്ങൾകൊണ്ട് യഥാക്രമം ഹരിക്കുക. ലഭിക്കുന്ന ഫലങ്ങളെ ഒന്നിടവിട്ട് കുറക്കുകയും കൂട്ടുകയും ചെയ്യുക. ഇതിൽനിന്നും ആർക്കിന്റെ നീളം ലഭിക്കും. ഗണിതക്രിയയിലൂടെ എഴുതിയാൽ

$$I = R \times \frac{R\ \text{സൈൻ}\ a}{R\ \text{കോസ്}\ a} = R\ \text{ടാൻ}\ a$$

$$II = I \times R \times \frac{R(\text{സൈൻ}\ a)^2}{R(\text{കോസ്}\ a)^2} = R(\text{ടാൻ}\ a)^3$$

തുടർന്ന് $R(\text{ടാൻ}\ a)^5$, $R(\text{ടാൻ}\ a)^7$....................എന്നിപ്രകാരം ലഭിക്കുന്നു. 3, 5, 7 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ഇപ്രകാരം ലഭിക്കും.

$a = \text{ടാൻ}\ a - {}^1/_3(\text{ടാൻ}\ a)^3 + {}^1/_5(\text{ടാൻ}\ a)^5$ ..... ഇവിടെ a ആംഗിളാണ്.

പുതുമന സോമയാജി 1448ൽ രചിച്ച കരണപദ്ധതിയിലെ ആറാം അദ്ധ്യായത്തിലെ 18-ാം തിയറമാണ് മേൽവിവരിച്ചത്. തിയറം ഇന്നറിയപ്പെടുന്നത് 1667 എ.ഡി യിൽ ജനിച്ച പാശ്ചാത്യ ഗണിതജ്ഞനായ ഡീമോയ്വറുടെ പേരിലാണ്.

12-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന ശങ്കരവർമൻ ടാൻജന്റ് ഗണിതക്രിയയിലുപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നത് ഇപ്രകാരമാണ്.

വ്യാസഘ്നേർക പദേ കൃതേഃഗ്നിഭിരേതാനീതേ ച തത്ഫലാത് ചൈകൈ കദ്യയുജാഹൃതേ ഷു പരിധേർഭേദോ യുഗോനൈക്യയോഃ ഏവം ചാത്ര പരാർധവിസ്തൃതി മഹാവൃത്തസ്യ നാഹോക്ഷരൈഃ സ്യാദ് ഭദ്രാംബുധിസിദ്ധജന്മഗണിതശ്രാദ്ധാസ്മ ജഭൂപഗീഃ

ഇതിന്റെ ആദ്യഭാഗം ഇപ്രകാരമാണത്രെ

$$\pi = 6\ \text{ടാൻ}\ \left({}^1/\sqrt{3}\right) - \left({}^1/\sqrt{3}\right)^3/_3 + \left({}^1/\sqrt{3}\right)^5/_5 \ldots\ldots\ldots\ldots)$$

ഭാരതീയ ഗണിതജ്ഞാനത്തിലെ സങ്കീർണങ്ങളായ അനവധി തിയറങ്ങൾ ഇന്ന് വിദേശികളുടെ പേരിൽ അറിയപ്പെടുന്നു.

ഗോവിന്ദസ്വാമി 13-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ കണ്ടുപിടിച്ച തിയറം ന്യൂട്ടൺ ഗോസ് (1670 എ.ഡി.) ഇന്റർപൊളേഷൻ ഫോർമുല എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. (ഈ തിയറം സംസ്കൃതവരിയിൽ ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്ന്യ)

ഗച്ഛാദ്യാത ഗുണാന്തരവപുര്യാ തൈഷ്യ ദിശാസനാച്ഛേദാഭ്യാസ സമൂഹകാർമുക കൃതിപ്രാപ്താത് ത്രിഭിസ്താഡിതാത് വേദൈർഹിഷഡ്ഭിർ അവാപ്തം അന്ത്യഗുണജ്ജേ രാശ്യോഃ ക്രമാത് അന്ത്യഭേഃ ഗന്തവ്യാഹത വർത്തമാനഗുണജാച്ഛാവാപ്തം ഏകാദിഭി. അന്ത്യാദ് ഉത്ക്രമതഃ ക്രമേ

ണ വിഷമൈഃ സംഖ്യാവിശേഷൈഃ ക്ഷിപേത് ഭങ്ക്ത്വാപ്തം, യദി മൗർവികാവിദിരയം മഖ്യാ ക്രമാത് വർതതേ ശോധ്യം വ്യുത്ക്രമതാ സ്തഥാകൃതഫലം

ഈ വരിയെ ഗണിതവരിയിലെഴുതിയാൽ

$$F(x+nh) = \Delta f(x) + nf(x) + \tfrac{1}{2} n(n-1) \quad (\Delta f(x) - \Delta f(x-h)$$

(ഈ ഗണിത വാക്യത്തിന് മലയാളത്തിൽ തർജ്ജമ അസാധ്യമായതിനാൽ ഡോ: കെ.വി. ശർമ്മയുടെ പുസ്തകത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വാക്യം അപ്രകാരം തന്നെ ഇവിടെ പകർത്തിയിരിക്കുന്നു)

വടേശ്വരാചാര്യൻ (800 AD) യിൽ കണ്ടുപിടിച്ച ഇനി വിവരിക്കുന്ന തിയറം ഇന്നറിയപ്പെടുന്നത് ന്യൂട്ടൺ ഗോസ് ബാക്ക്‌വേഡ് ഇന്റർപൊളേഷൻ ഫോർമുല എന്ന പേരിലാണ്.

ധനുഷാപ്ത ഭക്ത ജീവഘ്നാതേ ലബ്ധം സരൂപകം ദളിതം
ലബ്ധഘ്ന വിവരഹതം ച സംശോധ്യ നിയോജ്യ വികലജ്യാ.

ഡോ. കെ.വി. ശർമ്മയുടെ വിവരണത്തിൽ ഈ സംസ്കൃതവരിക്ക് തുല്യമായ ഗണിതവിവതരണം ഇപ്രകാരം നൽകിയിരിക്കുന്നു.

$$f(x) = f(x\,i) + (x - x\,i)\,{}^{1}/_{h}\,\Delta f(x\,i - h) + (x - x\,i)\,{}^{1}/_{h} \cdot (x - x\,i + h)\,{}^{1}/_{h} \cdot \Delta^2 f(x\,i - h)\tfrac{1}{2}$$

നീലകണ്ഠ സോമസുത്വൻ 13–ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ കണ്ടുപിടിച്ച താഴെ പറയുന്ന തിയറം ന്യൂട്ടൺസ് ഇൻഫിനിറ്റ് ജി. പി. കൺവർജന്റ് സീരീസ് എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

ഏവം യസ്തു തൃച്ഛേദ പരമഭാഗ പരമപര്യയാ അനന്തായാ അപി സംയോഗ : തസ്യ അനന്താനാം അപി കൽപ്യമാനസ്യ യോഗസ്യ ആദ്യ വയവിനഃ പരസ്പരമച്ഛേദാദ് ഏകോനച്ഛേദാമംശ സാധ്യം സർവത്രാപി സമാനം ഏവ

ഒരു ഇൻഫിനിറ്റ് സീരിസിന്റെ തുക എന്നത്, ഏതൊന്നിന്റെ പിന്നീട് വരുന്ന സംഖ്യകൾ, അതിനുമുമ്പ് വരുന്നതിൽ നിന്നു കുറഞ്ഞു കുറഞ്ഞു വരുന്നുവോ അത് എല്ലായ്പ്പോഴും ആദ്യ സംഖ്യയെ, പൊതു ഡിവൈസർ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്നതായിരിക്കും. (കൂടുതൽ വ്യക്തമായി അറിയുന്നതിന് ഈ തിയറം ഇംഗ്ലീഷിലെഴുതി പ്രസിദ്ധീകരിച്ചിട്ടുള്ളത് വായിക്കുക.)

യുക്തി ഭാഷാ ഗ്രന്ഥത്തിലെ π -D ബന്ധം ഇന്ന് ലെബ്നിറ്റ്സിന്റെ പേരിലറിയപ്പെടുന്നു.

വ്യാസവർഗാദ് രവിഹതാത് പദം സ്യാത് പ്രഥമം ഫലം.
തദാദിതാസ്ത്രി സംഖ്യാപ്തം ഫലം സ്യാദ് ഉത്തരോത്തരം
രൂപാദ്യയുഗ്മ സംഖ്യാഭിർഹൃതേഷ്വേഷു യഥാക്രമം വിശമൂനം
യുതേസ്ത്യക്ത്വാ സമം ഹി പരിധിർഭവേദ്

വ്യാസത്തിന്റെ സ്ക്വയറിനെ 12 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അതിന്റെ സ്ക്വയർ റൂട്ടെടുക്കുക ഇത് ഒന്നാമത്തെ ഫലം. ഇതിനെ 3 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ രണ്ടാം ഫലം ലഭിക്കും. രണ്ടാം ഫലത്തെ 5 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മൂന്നാംഫലം ഇപ്രകാരം തുടരുക. ഇതിനെ ക്രമത്തിൽ 1, 3, 5 കൊണ്ടു ഭാഗിക്കുക ഒന്നിടവിട്ടു കുറക്കുകയും കൂട്ടുകയും ചെയ്താൽ സർക്കംഫറൻസ് ലഭിക്കും.

സർക്കംഫറൻസ് πD

$$= \sqrt{12D^2} - \frac{\sqrt{12D^2}}{3x3} + \frac{\sqrt{12D^2}}{5x3^2} - \frac{\sqrt{12D^2}}{7x5x3^2} + \ldots\ldots$$

$$\pi = \sqrt{12}\,(1 - {}^{1}/_{3x3} + {}^{1}/_{5x3x3} - {}^{1}/_{7x5x3x3}$$

മാധവാചാര്യാരുടെ (1350 AD) ഇൻവേഴ്സ് ടാൻജന്റ് സീരീസ് ഇന്നറിയപ്പെടുന്നത് ഗ്രിഗറി (1638 AD) ലെബനിറ്റ്സ് (1646 AD) സീരീസ് എന്ന പേരിലാണ്.

ഇഷ്ടജ്യാത്രജ്യയോർഘാതാത് കോട്യാപ്തം പ്രഥമ ഫലം
ജ്യാവർഗം ഗുണകം കൃത്വാകോടി വർഗം ച ഹാരകം
പ്രഥമാദി ഫലേഭ്യോഽഥ നേയാ ഫല കൃതിർമുഹു:
ഏകത്രയാ ദ്യോജ സംഖ്യാഭിർ ഭക്തേഷ്വേതേഷ്വനുക്രമാത്
ഓജാനാം സംയുതേസ്ത്യക്ത്വാ യുഗ്മ യോഗം ധനുർഭവേദ്
ദോ : കോട്യോരൽപമേവേഹ കൽപനീയം ഇഹസ്മൃതം
ലബ്ധീനാം അവസാനം സ്യാന്ന തഥാപി മുഹു: കൃതേ

ഗണിതത്തിലൂടെ സംഗ്രഹിച്ച് എഴുതിയാൽ

$\mathrm{Tan}\, a = a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} - \frac{a^7}{7} + \ldots\ldots$ എന്നു ലഭിക്കും

ഇനിയും അനവധി തിയറങ്ങൾ ഭാരതീയ ഗണിതാചാര്യന്മാർ കണ്ടുപിടിച്ചിട്ടുണ്ട്. അവയൊന്നും തത്തുല്യമായ മലയാളത്തിൽ വിവരിക്കുവാൻ സാധ്യമല്ല. ഇവയെല്ലാം ഇന്ത്യൻ ഇൻസ്റ്റിറ്റ്യൂട്ട് ഓഫ് സയിന്റിഫിക് ഹെറിറ്റേജിന്റെ ഇംഗ്ലീഷ് പ്രസിദ്ധീകരങ്ങളിലുണ്ട്. പരമേശ്വരാചാര്യർ (1360 AD) കണ്ടുപിടിച്ച ല്യൂഹ്ളർ (1782 AD) ഫോർമുല മാധവാചാര്യർ കണ്ടുപിടിച്ച ലെബനിറ്റ്സ് പവർസീരീസ് മാധവാചാര്യർ കണ്ടുപിടിച്ച π യുടെ അപ്രോക്സിമേഷൻ ഡി മോയ്വർ സീരീസ്. മാധവാചാര്യർ (1340 AD) യിൽ കണ്ടുപിടിച്ച ന്യൂട്ടൺ പവർ സീരീസ്. നീലകണ്ഠ സോമയാജി കണ്ടുപിടിച്ച ടേയ്ലർ (1685 AD) സൈൻ ആന്റ് കോസൈൻ ഫങ്ഷൻ ഇവയെല്ലാം അതിൽ ചിലതു മാത്രം.

ഭാരതീയ പൈതൃകമെന്ന മഹാസാഗരത്തിലെ ഏതാനും തുള്ളികളാണ് നിങ്ങളുടെ മുമ്പിലവതരിപ്പിച്ചത്. സാധാരണക്കാരായവർക്ക് ഒന്നോടിച്ചു നോക്കുവാൻ മാത്രം ഗഹനമായ വിവരണങ്ങൾ മറ്റൊരു പുസ്തകമായി തന്നെ വരുന്നുണ്ട്.

എല്ലാം പഠിക്കണം. അല്ലെങ്കിൽ നമുക്കൂഹിക്കുവാൻ പറ്റുന്നതിനേക്കാൾ കൂടുതൽ ഇവിടെ ഉണ്ടായിരുന്നു എന്നെങ്കിലും അറിയണം.

ഈ പൈതൃക വിജ്ഞാനം നിങ്ങളുടെ മുമ്പിൽ എത്തിക്കുവാൻ നിരന്തരം പരിശ്രമിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കും.

ലോകരാഷ്ട്രങ്ങൾ ഭാരതത്തിന്റെ പൈതൃക പഠനത്തിനായി നമ്മെ സമീപിക്കുന്നു. നമ്മുടെ അറിവുകൾ നിത്യജീവിതത്തിലനുഷ്ഠിക്കുന്നു. അവയിൽ പലതും അവർ പേറ്റന്റ് ചെയ്യുന്നു. ഈ പൈതൃകത്തിന്റെ അവകാശികൾ ഇനിയും ഈ സമ്പത്തിനെക്കുറിച്ച് അജ്ഞരായിരിക്കുന്നത് ദുഃഖകരമല്ലേ....?

ഭാരതത്തിന്റെ പൈതൃക സമ്പത്ത് സത്യസന്ധമായി നിങ്ങളുടെ മുമ്പിലെത്തിക്കുവാൻ ഇന്ത്യൻ ഇൻസ്റ്റിറ്റ്യൂട്ട് ഓഫ് സയിന്റിഫിക് ഹെറിറ്റേജ് എന്നുമെന്നും തയ്യാറായിരിക്കും.

അനുഗ്രഹിക്കുക! സഹകരിക്കുക!